Министерство образования Республики Беларусь

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«ГРОДНЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ЯНКИ КУПАЛЫ»

В. Н. ГОРБУЗОВ

ЦЕЛЫЕ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Монография

Гродно 2006

УДК 517.925

Горбузов, В.Н. Целые решения алгебраических дифференциальных уравнений : монография / В.Н. Горбузов. – Гродно : ГрГУ, 2006. – 255 с. – ISBN 985-417-475-1

В монографии рассмотрены методы нахождения полиномиальных и целых трансцендентных решений алгебраических дифференциальных уравнений.

Книга рассчитана на научных работников и аспирантов, занимающихся общей и аналитической теориями дифференциальных уравнений. Также может быть использована при чтении специальных курсов по дифференциальным уравнениям и их приложениям.

Библиогр. 202 назв.

Рекомендовано Советом Гродненского государственного университета имени Янки Купалы.

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Белорусского государственного университета *В.И. Громак*.

доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений и оптимального управления Гродненского государственного университета им. Янки Купалы *С.А. Минюк*.

ISBN 985-417-475-1

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$P\big(z, w, w', \dots, w^{(k)}\big) = 0, \tag{ADE}$$

где P — полином относительно независимого комплексного переменного z, зависимого комплексного переменного w и его производных $w', \dots, w^{(k)}$.

Уравнение (ADE) будем называть *алгебраическим обыкновенным дифференциальным уравнением*, отражая алгебраическое вхождение переменных $z, w, w', \dots, w^{(k)}$ в его задание.

Локальные свойства обыкновенных дифференциальных уравнений в комплексной области устанавливаются посредством классической теоремы Коши о существовании и единственности голоморфного решения (см., например, [15; 106; 110; 171]).

Задача усложняется, когда решения исследуются на всей комплексной плоскости.

В аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений ставятся в некотором смысле обратные задачи. Например, широко известная задача Римана о построении двух линейных однородных дифференциальных уравнений, коэффициенты которых имеют три полюса первого порядка на конечном расстоянии и четвёртую регулярную особую точку в бесконечности, по заданным линейным подстановкам в окрестности этих полюсов (см. [57; 89; 145], где приведена дополнительная библиография).

Иная задача в этом направлении состоит в выделении обыкновенных дифференциальных уравнений, все решения которых однозначны в рассматриваемой области. Известно много интересных и важных результатов по этому направлению (см. [1; 2; 15; 38;

41; 42; 44; 64; 65; 97; 105; 106; 142; 147; 156; 184; 185]; в этих работах можно найти и обширную библиографию).

Вопросы, рассматриваемые в монографии, относятся к задачам следующего характера.

Прежде всего это существование в множестве всех решений алгебраического дифференциального уравнения (ADE) таких, которые обладают наперёд заданными свойствами.

Например, существование полиномиальных [34; 37; 52; 72; 74; 77; 78; 87; 93; 99; 128; 129; 137; 144; 154; 155; 157; 158; 168; 169; 172; 183; 186], рациональных [11; 42, 97; 113; 123; 149; 164], целых трансцендентных [8; 9; 19; 24; 29; 59; 91; 97; 139; 133] и трансцендентных мероморфных [16; 17; 42; 58; 90; 95; 97; 99; 114 − 116; 132; 139; 141; 142; 162; 170; 173] решений у алгебраического дифференциального уравнения.

Наряду с вопросами существования решений специальных видов ставятся и решаются задачи о свойствах этих решений.

Так, если решение $w\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является целой трансцендентной функцией, то в первую очередь определяются его характеристики роста: порядок и тип [8; 9; 19; 29; 33; 37; 91; 92; 133; 194 − 202] если решение $w\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ является полиномом, то определяются его степень и коэффициент старшего члена [6; 7; 21; 26; 37; 52; 67; 71; 72; 75; 76; 79; 81; 82; 85 − 87; 127; 129; 130; 135; 136; 140; 146; 153; 160; 163; 179; 180; 182; 190 − 192; 259].

Для ссылок на формулы (теоремы, леммы и т.д.) будем использовать записи $(k.l)$, $(k.l.m)$ и $(k.l.m.n)$ ($k.l$, $k.l.m$ и $k.l.m.n$), в которых k — номер формулы (теоремы, леммы и т.д.), l — номер пункта, m — номер параграфа, n — номер главы. При этом введение считаем нулевой главой.

Глава I

АСИМПТОТИКА ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

Рост полинома комплексного переменного в окрестности бесконечно удалённой точки характеризуется его степенью. В этой связи удобно использовать следующие понятия.

Из двух членов полинома считается тот выше, у которого показатель степени больше.

Если все члены полинома расположены в таком порядке, что каждый следующий член ниже предыдущего, то будем говорить, что члены этого полинома расположены *лексикографически*. Тот член, который при этом стоит на первом месте, назовём *высшим членом* полинома.

Показатель степени высшего члена полинома является степенью этого полинома, а значит, он определяет рост полинома.

Асимптотическими характеристиками полинома являются его степень и коэффициент высшего члена этого полинома.

Например, полином n-й степени комплексного переменного z над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с лексикографическим расположением членов имеет вид

$$P\colon z \to p_n z^n + p_{n-1} z^{n-1} + \ldots + p_0, \ \forall z \in \mathbb{C},$$

где p_i, $i = \overline{0, n}$, — комплексные числа, $p_n \neq 0$.

Степень $\deg P(z) = n$ и ненулевой коэффициент p_n высшего члена $p_n z^n$ являются асимптотическими характеристиками этого полинома.

Постоянная функция

$$P\colon z \to p_0, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ (p_0 \in \mathbb{C})$$

является полиномом нулевой степени, а нулевая функция

$$P\colon z \to 0, \ \forall z \in \mathbb{C},$$

называется *нулевым полиномом* (или *нуль-полиномом*).

§ 1. Особые и неособые степени полиномиальных решений

1. Алгебраические дифференциальные уравнения высших порядков

Алгебраическое дифференциальное уравнение высшего порядка (ADE) запишем в виде

$$\sum_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(z) \prod_{k=1}^{s_i} \left(w^{\left(l_{k_i}\right)} \right)^{\nu_{k_i}} = 0, \tag{1}$$

где $\mu_i,\, l_{k_i}$ и $\nu_{k_i},\ k_i = \overline{1, s_i}\,,\ i = \overline{0, N}\,,$ есть целые неотрицательные числа, а коэффициенты $B_{\mu_i},\ i = \overline{0, N},$ — полиномы с лексикографическим расположением членов

$$B_{\mu_i} : z \to \beta_i z^{b_i} + \ldots\,,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \beta_i \neq 0,\ i = \overline{0, N}\,. \tag{2}$$

Для каждого члена

$$B_{\mu_i}(z) \prod_{k=1}^{s_i} \left(w^{\left(l_{k_i}\right)} \right)^{\nu_{k_i}} \tag{3}$$

уравнения (1), выделенного по зависимому переменному и его производным, установим следующие характеристики: числа

$$\varkappa_i = \sum_{k=1}^{s_i} \nu_{k_i}, \quad \mathfrak{m}_i = \sum_{k=1}^{s_i} l_{k_i} \nu_{k_i},$$

$$\mathfrak{n}_i = b_i - \mathfrak{m}_i, \quad \mathfrak{l}_i = \max_{k=\overline{1,s_i}} \{ l_{k_i} \}$$

соответственно назовём *размерностью*, *относительным весом*, *абсолютным весом*, *порядком* i-го члена (3) алгебраического дифференциального уравнения (1).

Заметим, что число

$$\mathfrak{l} = \max\{\mathfrak{l}_0, \ldots, \mathfrak{l}_N\}$$

является порядком дифференциального уравнения (1).

Числа

$$\mathfrak{d} = \min\{\varkappa_0, \ldots, \varkappa_N\} \quad \text{и} \quad d = \max\{\varkappa_0, \ldots, \varkappa_N\}$$

соответственно будем называть *минимальной* и *максимальной размерностями* членов уравнения (1).

Члены алгебраического дифференциального уравнения с минимальной размерностью назовём *минорирующими*, а с максимальной размерностью — *доминирующими*.

2. Неособые степени полиноминальных решений

Будем считать, что полиномиальное решение алгебраического дифференциального уравнения (1.1) имеет следующее лексикографическое расположение членов:

$$w\colon z \to \alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \ldots + \alpha_0, \ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

где $\alpha_j \in \mathbb{C}$, $j = \overline{0, m}$, $\alpha_m \neq 0$, $m \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Требование $\alpha_m \neq 0$ исключает из рассмотрения нулевое полиномиальное решение, что весьма удобно для дальнейших рассуждений.

Если полином (1) подставить в i-й член (3.1) дифференциального уравнения (1.1), то получим либо тождественный нуль (когда порядок члена $\mathfrak{l}_i > m$), либо полином с лексикографическим представлением

$$\beta_i \alpha_m^{\varkappa_i} \prod_{k=1}^{s_i} \left(\binom{m}{l_{k_i}} l_{k_i}! \right)^{\nu_{k_i}} z^{\varkappa_i m + \mathfrak{n}_i} + \ldots, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ (m \geqslant \mathfrak{l}_i). \tag{2}$$

Высший член полинома (2) имеет показатель степени $\varkappa_i m + \mathfrak{n}_i$

и коэффициент $\beta_i \alpha_m^{\varkappa_i} \prod\limits_{k=1}^{s_i} \Bigl(\binom{m}{l_{k_i}} l_{k_i}! \Bigr)^{\nu_{k_i}}$.

Определение 1. *Функцию*

$$S_i \colon m \to \varkappa_i m + \mathfrak{n}_i, \ \forall m \in \mathbb{N}_0, \ m \geqslant \mathfrak{l}_i, \tag{3}$$

назовём ***функцией степени*** i*-го члена* (3.1) *алгебраического дифференциального уравнения* (1.1).

Наряду с функцией натурального аргумента (3) для i-го члена (3.1) будем рассматривать и функцию двух переменных

$$K_i \colon (m, \alpha_m) \to \beta_i \alpha_m^{\varkappa_i} \prod_{k=1}^{s_i} \left(\binom{m}{l_{k_i}} l_{k_i}! \right)^{\nu_{k_i}} \tag{4}$$

с множеством определения

$$\mathrm{D}K_i = \{(m, \alpha_m) \colon m \in \mathbb{N}_0, \ m \geqslant \mathfrak{l}_i, \ \alpha_m \in \mathbb{C} \backslash \{0\}\}.$$

Определение 2. *Функцию* (4) *назовём* ***функцией коэффициента*** i*-го члена* (3.1) *алгебраического дифференциального уравнения* (1.1).

По мере необходимости будем оперировать функциями:

$$\widetilde{K}_i \colon m \to \widetilde{K}_i(m), \ \forall m \in \mathbb{N}_0, \ m \geqslant \mathfrak{l}_i; \tag{5}$$

$$\overset{*}{K}_i \colon (m, \alpha_m) \to \overset{*}{K}_i (m, \alpha_m), \ \forall (m, \alpha_m) \in \mathrm{D}(K_i); \tag{6}$$

$$\widehat{K}_i \colon m \to \widehat{K}_i(m), \ \forall m \in \mathbb{N}_0, \ m \geqslant \mathfrak{l}_i, \tag{7}$$

которые построены на основании функции степени (4) соответственно по формулам:

$$\alpha_m^{\varkappa_i} \widetilde{K}_i(m) = K_i(m, \alpha_m), \ \forall m \in \mathbb{N}_0, \ m \geqslant \mathfrak{l}_i, \ \forall \alpha_m \in \mathbb{C} \backslash \{0\};$$

$$\beta_i \overset{*}{K}_i (m) = K_i(m, \alpha_m), \ \forall m \in \mathbb{N}_0, \ m \geqslant \mathfrak{l}_i, \ \forall \alpha_m \in \mathbb{C} \backslash \{0\};$$

$$\beta_i \alpha_m^{\varkappa_i} \widehat{K}_i(m) = K_i(m, \alpha_m), \ \forall m \in \mathbb{N}_0, \ m \geqslant \mathfrak{l}_i, \ \forall \alpha_m \in \mathbb{C} \backslash \{0\}.$$

Функция степени (3), функция коэффициента (4), а также функции (5) $-$ (7), зависят от натурального аргумента m, который не меньше порядка $\mathfrak{l}_i$ члена (3.1) уравнения (1.1).

Пусть

$$\ell = \min_{i=\overline{0,N}} \{\mathfrak{l}_i\}.$$

Тогда при $\ell > 0$ любой полином степени $m < \ell$ является решением дифференциального уравнения (1.1). Такие полиномы-решения алгебраического дифференциального уравнения (1.1) будем называть *тривиальными полиномиальными решениями.*

Поэтому ставится задача нахождения нетривиальных полиномиальных решений, то есть, решений дифференциального уравнения (1.1) в виде полиномов (1) степени $m \geqslant \ell$.

Лемма 1 (*необходимый признак существования полиномиального решения*). *Если число* $m_t \geqslant \ell$ *является степенью полиномиального решения* (1) *алгебраического дифференциального уравнения* (1.1), *то хотя бы у двух членов этого дифференциального уравнения функции степени в точке* $m = m_t$ *имеют равные значения, причём эти значения должны быть наибольшими среди значений всех функций степени в этой точке.*

Доказательство. Если бы значение функции степени в точке $m = m_t$ при $m_t \geqslant \ell$ только одного члена (3.1) уравнения (1.1) было наибольшим среди возможных значений функций степени в этой точке, то при подстановке полинома (1) в уравнение (1.1) оно обращалось бы в тождество на поле $\mathbb{C}$ лишь при условии, что значение функции коэффициента (4) этого члена при $m = m_t$ равно нулю. То есть, существует такое ненулевое комплексное число α_m, что $K_i(m_t, \alpha_{m_t}) = 0$.

Однако у функции (7) значение $\widehat{K}_i(m_t) \neq 0$, а также коэффициенты $\alpha_{m_t} \neq 0$ и $\beta_i \neq 0$. Поэтому значение функции коэффициента $K_i(m_t, \alpha_{m_t}) \neq 0$, $\forall \alpha_{m_t} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. ■

Пример 1. У алгебраического дифференциального уравнения

$$(z+2)(w')^2 - ww' - w^4 + (z+2)^4 = 0 \tag{8}$$

порядки членов $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l}_1 = 1,\ \mathfrak{l}_2 = \mathfrak{l}_3 = 0.$

Дифференциальное уравнение (8) не имеет тривиальных полиномиальных решений, так как число $\ell = \min\{1, 0\} = 0.$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что нулевой полином не является решением уравнения (8).

Чтобы установить наличие нетривиальных полиномиальных решений у уравнения (8), составим функции степени его членов:

$$S_\tau \colon m \to 2m - 1,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \tau = 0,\ \tau = 1;$$

$$S_2 \colon m \to 4m,\ \forall m \in \mathbb{N}_0; \quad S_3 \colon m \to 4,\ \forall m \in \mathbb{N}_0.$$

Среди функций степени $S_i,\ i = \overline{0,3}$, существуют такие, которые принимают равные наибольшие значения лишь при одном целом неотрицательном числе $m = 1$:

$$S_2(1) = S_3(1) = 4 > S_0(1) = S_1(1) = 1.$$

Следовательно, полиномиальные решения уравнения (8), если они существуют, являются полиномами первой степени.

Непосредственной подстановкой в дифференциальное уравнение (8) полинома $w \colon z \to \alpha_1 z + \alpha_0,\ \forall z \in \mathbb{C}, (\alpha_1 \neq 0)$ устанавливаем, что это уравнение имеет четыре полиномиальных решения:

$$w_1 \colon z \to z + 2,\ \forall z \in \mathbb{C}; \quad w_2 \colon z \to -z - 2,\ \forall z \in \mathbb{C};$$

$$w_3 \colon z \to (z + 2)i,\ \forall z \in \mathbb{C}; \quad w_4 \colon z \to -(z + 2)i,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Определение 3. *Полиномиальное решение* (1) *степени* m_t *алгебраического дифференциального уравнения* (1) *назовём полиномиальным решением с* ***особой степенью****, если*

$$\begin{gathered} S_{p_0}(m_t) = S_{p_1}(m_t) = \ldots = S_{p_r}(m_t) > S_{p_\eta}(m_t), \\ \varkappa_{p_0} = \varkappa_{p_1} = \ldots = \varkappa_{p_r},\ 0 < r \leqslant N, \end{gathered} \tag{9}$$

где η *— любое число из множества* $\{r + 1, \ldots, N\}$ *такое, что у* p_η*-го члена уравнения* (1.1) *порядок* $\mathfrak{l}_{p_\eta} \leqslant m_t$.

Тогда полиномиальное решение (1) *с неособой степенью* $\deg w(z) = m_t$ уравнения (1.1) характеризуется тем, что хотя бы два члена (3.1) этого уравнения имеют неравные размерности, в то время как значения их функций степени в точке $m = m_t$ равны между собой и не меньше значений функций степени в этой же точке всех остальных членов уравнения.

Очевидно, что только для нетривиальных полиномиальных решений речь может идти об особых и неособых степенях.

Говоря о том, является ли (1) при $m = m_t$ полиномиальным решением с особой или неособой степенью, учитывается, что оперируем понятием функции степени. А значит, в рассуждениях участвуют лишь те члены (3.1), порядки $\mathfrak{l}_i$ которых меньше или равны рассматриваемому m_t.

Исходя из понятия неособой степени и того, что функции степени хотя бы двух членов уравнения (1.1) должны иметь одинаковые значения, устанавливаем, что справедлива

Теорема 1. *Неособые степени полиномиальных решений дифференциального уравнения* (1.1) *содержатся в наборе*

$$\{{}^{i}m^{j}\},\ i, j \in \{0,\, 1, \ldots, N\},\ i \neq j, \tag{10}$$

где

$${}^{i}m^{j} = \frac{\mathfrak{n}_i - \mathfrak{n}_j}{\varkappa_j - \varkappa_i}\,,\ i, j \in \{0,\, 1, \ldots, N\},\ i \neq j,$$

причём в набор (10) *входят лишь те целые неотрицательные числа, которые удовлетворяют неравенству*

$${}^{i}m^{j} \geqslant \max\{\mathfrak{l}_i,\, \mathfrak{l}_j\},$$

и составляется этот набор на основании всех тех членов уравнения (1.1), *у которых попарно не равны размерности, т.е.* $\varkappa_i \neq \varkappa_j,\ i, j = \overline{0, N}\,,\ i \neq j.$

Учитывая, что значения функций степени при $m = m_t$ хотя бы для двух членов уравнения (1.1) с неравными размерностями должны не только совпадать, но и быть наибольшими, в силу теоремы 1 заключаем, что имеет место

Теорема 2 (*необходимый признак существования полиномиального решения с неособой степенью*). *Для того чтобы число* m_t *из набора* (10) *было неособой степенью полиномиально-*

го решения (1) *уравнения* (1.1), *необходимо существование* $f+1,\ 0<f\leqslant N,$ *членов у этого уравнения со свойством*

$$S_{\tau_0}(m_t) = S_{\tau_1}(m_t) = \ldots = S_{\tau_f}(m_t) > S_{\tau_\varepsilon}(m_t), \tag{11}$$

где ε *— любое число из множества* $\{f+1,\ldots,N\}$ *такое, что у* τ_ε*-го члена уравнения* (1.1) *порядок* $\mathfrak{l}_{\tau_\varepsilon} \leqslant m_t$, *причём должны существовать хотя бы два члена у уравнения* (1.1) *с номерами* $\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_f$, *у которых размерности не равны.*

Таким образом, для нахождения неособых степеней полиномиальных решений (1) алгебраического дифференциального уравнения (1.1) необходимо последовательно выполнить операции:

1) составить набор чисел (10), описанный в теореме 1;

2) отобрать из набора (10) те числа, которые удовлетворяют условию (11) из теоремы 2.

Пример 2 (продолжение примера 1). По характеристикам членов алгебраического дифференциального уравнения (8):

$$\varkappa_0 = 2,\ \varkappa_1 = 2,\ \varkappa_2 = 4,\ \varkappa_3 = 0; \quad \mathfrak{m}_0 = 2,\ \mathfrak{m}_1 = 1,\ \mathfrak{m}_2 = 0,\ \mathfrak{m}_3 = 0;$$

$$b_0 = 1,\ b_1 = 0,\ b_2 = 0,\ b_3 = 4; \quad \mathfrak{n}_0 = -1,\ \mathfrak{n}_1 = -1,\ \mathfrak{n}_2 = 0,\ \mathfrak{n}_3 = 4$$

находим:

$${}^0m^2 = \frac{-1-0}{4-2} = -\frac{1}{2} = {}^2m^0; \qquad {}^0m^3 = \frac{-1-4}{0-2} = \frac{5}{2} = {}^3m^0;$$

$${}^1m^2 = \frac{-1-0}{4-2} = -\frac{1}{2} = {}^2m^1; \qquad {}^1m^3 = \frac{-1-4}{0-2} = \frac{5}{2} = {}^3m^1;$$

$${}^2m^3 = \frac{0-4}{0-4} = 1 = {}^3m^2.$$

Тогда набор (10) для уравнения (8) является одноэлементным множеством $\{1\}$.

Следовательно, каждое полиномиальное решение дифференциального уравнения (8), построенное в примере 1, является полиномиальным решением с неособой степенью.

3. Особые степени полиноминальных решений

Пусть дифференциальное уравнение (1.1) имеет полиномиальное решение (1.2) с особой степенью $m = m_t$.

Тогда в соответствии с определением 1.2 в уравнении (1.1) должно содержаться $h+1,\ 1 \leqslant h \leqslant N,$ членов со свойством

$$\begin{gathered} \varkappa_{\tau_0} = \varkappa_{\tau_1} = \ldots = \varkappa_{\tau_h}, \quad \mathfrak{n}_{\tau_0} = \mathfrak{n}_{\tau_1} = \ldots = \mathfrak{n}_{\tau_h}, \\ S_{\tau_h}(m_t) > S_{\tau_\eta}(m_t), \quad 1 \leqslant h \leqslant N, \end{gathered} \tag{1}$$

где η — любое число из множества $\{h+1, \ldots, N\}$ такое, что у τ_η-го члена уравнения (1.1) порядок $\mathfrak{l}_{\tau_\eta} \leqslant m_t$.

Степень m_t в этом случае является корнем хотя бы одного из уравнений

$$\sum_{\xi=0}^{s} \widetilde{K}_{\tau_{p_\xi}}(m) = 0, \quad s = \overline{1, h}\,,\ p_\xi = \overline{0, h}\,,\ p_\xi \neq p_\zeta,\ \xi \neq \zeta. \tag{2}$$

Следовательно, справедлива

Теорема 1 (*необходимый признак существования полиномиального решения с особой степенью*). *Если число* m_t *является особой степенью полиномиального решения* (1.2) *уравнения* (1.1), *то выполняются соотношения* (1) *и число* m_t *будет корнем хотя бы одного из уравнений* (2).

В дифференциальном уравнении (1.1) сгруппируем члены по признаку равенства размерностей. С этой целью множество индексов $\{\mu_0, \ldots, \mu_N\}$ представим дизъюнктивным объединением $\{\mu_0, \ldots, \mu_N\} = \bigsqcup\limits_{r=0}^{k} \{\mu^r_{\tau_0}, \ldots, \mu^r_{\tau_{h_r}}\},$ исходя из того, что у членов с номерами $\mu^r_{\tau_0}, \ldots, \mu^r_{\tau_{h_r}}$ размерности $\varkappa^r_{\tau_0} = \ldots = \varkappa^r_{\tau_{h_r}}$. При этом $r = \overline{0, k}\,,\ 1 \leqslant h_r \leqslant N,\ \sum\limits_{r=0}^{k} h_r = N - k.$

Тогда в соответствии с теоремой 1 получаем

Следствие 1. *Особые степени полиноминальных решений* (1.2) *дифференциального уравнения* (1.1) *содержатся в множестве целых неотрицательных чисел, являющихся корнями хотя бы одного из уравнений*

$$\sum_{\xi=0}^{s_r} \widetilde{K}^r_{\tau_{p_\xi}}(m) = 0, \tag{3}$$

где $r = \overline{0,k}$, $s_r = \overline{1,h_r}$, $p_\xi = \overline{0,h_r}$, $p_\xi \neq p_\zeta$, $\xi \neq \zeta$, $1 \leqslant h_r \leqslant N$, *построенных на основании функций* (5.2) *тех членов уравнения* (1.1), *у которых равны размерности:*

$$\varkappa^r_{\tau_0} = \ldots = \varkappa^r_{\tau_{h_r}}, \ r = \overline{0,k}, \ 1 \leqslant h_r \leqslant N, \ \sum_{r=0}^{k} h_r = N - k. \tag{4}$$

Для полиномиальных решений с особой степенью $m = m_t$ должны выполняться условия (1).

Тогда согласно следствию 1 имеет место

Теорема 2. *Особые степени полиномиальных решений* (1.2) *уравнения* (1.1) *содержатся в множестве целых неотрицательных чисел, являющихся корнями хотя бы одного из уравнений* (3), *построенных на основании функций* (5.2) *тех членов* (3.1) *уравнения* (1.1), *для которых*

$$\varkappa^r_{\tau_0} = \ldots = \varkappa^r_{\tau_{h_r}}, \ \mathfrak{n}^r_{\tau_0} = \ldots = \mathfrak{n}^r_{\tau_{h_r}}, r = \overline{0,k}, \ 1 \leqslant h_r \leqslant N. \tag{5}$$

Сравнивая условия (1) и (5), заключаем

Теорема 3. *Если целый неотрицательный корень* m_t *одного из уравнений* (3) *при условиях* (5) *является особой степенью полиномиального решения* (1.2) *уравнения* (1.1), *то существует такое число* r *и оно единственное, что*

$$S^r_{\tau_0}(m_t) = \ldots = S^r_{\tau_{h_r}}(m_t) > S_\eta(m_t), \tag{6}$$

при любом $\eta \in \{\mu_0, \ldots, \mu_N\} \setminus \{\mu^r_{\tau_0}, \ldots, \mu^r_{\tau_{h_r}}\}$.

Каждое из уравнений (3) может иметь целые неотрицательные корни, которые не являются особыми степенями полиномиальных решений.

Уравнения (3) составлены простым перебором при выполнении условий (5).

Кроме того, зачастую легче проверить, является ли то или иное число m_t корнем уравнения, чем найти все его корни.

Эти особенности можно учесть, если ввести в рассмотрение порядки $\mathfrak{l}_i$ тех членов уравнения (1.1), на основании которых построены равенства (3).

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что первые $h+1$ членов уравнения (1.1) обладают свойством

$$\begin{gathered}\varkappa_0 = \ldots = \varkappa_h \neq \varkappa_\eta, \quad \eta = \overline{h+1, N}\,, \ 1 \leqslant h \leqslant N, \\ \mathfrak{n}_0 = \ldots = \mathfrak{n}_\lambda > \mathfrak{n}_\delta, \quad \delta = \overline{\lambda+1, h}\,, \ 1 \leqslant \lambda \leqslant h.\end{gathered} \tag{7}$$

Если в уравнении (1.1) нет членов, характеристики которых связаны соотношениями (7), то в силу определения 1.2 это уравнение не имеет полиномиальных решений с особыми степенями.

В зависимости от порядков $\mathfrak{l}_0, \ldots, \mathfrak{l}_h$ первые $h+1$ членов уравнения (1.1) со свойством (7) разделим на классы:

класс 1. $\mathfrak{l}_{p_0^0} = \ldots = \mathfrak{l}_{p_{q_0}^0} = \mathfrak{l}_0$;

класс 2. $\mathfrak{l}_{p_0^1} = \ldots = \mathfrak{l}_{p_{q_1}^1} = \mathfrak{l}_1$; ... ;

класс $v+1$. $\mathfrak{l}_{p_0^v} = \ldots = \mathfrak{l}_{p_{q_v}^v} = \mathfrak{l}_v, \mathfrak{l}_0 < \ldots < \mathfrak{l}_v, \sum\limits_{\theta=0}^{v} q_\theta = \lambda - v.$

Особые степени решений (1.2) уравнения (1.1) на основании $h+1$ членов со свойством (7) будем находить путём последовательного выполнения следующих шагов.

Шаг 1. При $q_0 \geqslant 1$ составляем уравнение

$$\sum_{i=0}^{q_0} \widetilde{K}_{p_i^0}(m) = 0. \tag{8}$$

Проверяем, являются ли корнями уравнения (8) числа m_t^0 такие, что $\mathfrak{l}_0 \leqslant m_t^0 < \mathfrak{l}_1$.

Особыми степенями могут быть лишь те корни m_t уравнения (8), которые (согласно теореме 3) удовлетворяют условиям

$$S_{p_0^0}(m_t) = \ldots = S_{p_{q_0}^0}(m_t) > S_\eta(m_t),\ \eta = \overline{h+1, N}\,. \tag{9}$$

Отметим, что числа $m < \mathfrak{l}_0$ не могут быть особыми степенями полиномиальных решений (1.2), полученных на основании первых $\lambda+1$ членов уравнения (1.1), ибо в этом случае первые $\lambda+1$ членов обращаются в тождественный нуль.

В принципе, числа $m < \mathfrak{l}_0$ для уравнения (1.1) могут быть особыми степенями полиномиальных решений (1.2), но они будут доставляться другими комплексами членов уравнения (1.1) со свойством, аналогичным свойству (7), в том числе для членов с номерами $\delta \in \{\lambda+1, \ldots, h\}$.

При $q_0 = 0$ шаг 1 отпадает, поскольку равенство (8) в этом случае не имеет смысла, что следует из задания функций (5.2).

Шаг 2. Составляем уравнение

$$\sum_{i=0}^{q_0} \widetilde{K}_{p_i^0}(m) + \sum_{i=0}^{q_1} \widetilde{K}_{p_i^1}(m) = 0. \tag{10}$$

Проверяем, являются ли корнями уравнения (10) числа m_t^1 такие, что $\mathfrak{l}_1 \leqslant m_t^1 < \mathfrak{l}_2$.

Лишь те корни m_t^1 уравнения (10) могут быть особыми степенями решений (1.2), которые (теорема 3) удовлетворяют условиям

$$S_{p_0^0}\bigl(m_t^1\bigr) = \ldots = S_{p_{q_0}^0}\bigl(m_t^1\bigr) = S_{p_0^1}\bigl(m_t^1\bigr) = \ldots =$$

$$= S_{p_{q_1}^1}\bigl(m_t^1\bigr) > S_\eta\bigl(m_t^1\bigr), \quad \eta = \overline{h+1, N}\,.$$

Аналогичным образом продолжаем рассуждения до v-го шага включительно.

Шаг $v+1$. Составляем уравнение

$$\sum_{i=0}^{\lambda} \widetilde{K}_i(m) = 0. \tag{11}$$

Находим целые неотрицательные корни m_t^v уравнения (11) такие, что $m_t^v \geqslant \mathfrak{l}_v$.

Особыми степенями решений (1.2) могут быть лишь те корни m_t^v уравнения (11), которые (в силу теоремы 3) удовлетворяют условиям

$$S_0\bigl(m_t^v\bigr) = \ldots = S_\lambda\bigl(m_t^v\bigr) > S_\eta\bigl(m_t^v\bigr), \quad \eta = \overline{h+1, N}\,.$$

Выделив все возможные наборы членов уравнения (1.1) со свойством, аналогичным свойству (7), и для каждого набора проделав последовательно указанные шаги, находим множество чисел, в котором содержатся все особые степени.

Пример 1 (продолжение примеров 1.2 и 2.2). Проверим наличие у дифференциального уравнения (8.2) полиномиальных решений с особой степенью.

В дифференциальном уравнении (8.2) только нулевой и первый члены имеют одинаковые размерности $\varkappa_0 = \varkappa_1 = 2$ и равные абсолютные веса $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_1 = -1$ (выполняются условия теоремы 2).

Поскольку порядки $\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l}_1 = 1,$ то особые степени надо искать в множестве натуральных корней уравнения (8):

$$m^2 - m = 0 \iff m(m-1) = 0.$$

Стало быть, особой степенью может быть только $m_t^0 = 1.$

Однако не выполняются условия (9):

$$S_0(1) = S_1(1) > S_\eta(1),\ \eta = 2,\ \eta = 3,$$

так как

$$S_0(1) = S_1(1) = 1, \quad \text{а} \quad S_2(1) = S_3(1) = 4.$$

Следовательно, у уравнения (8.2) нет полиномиальных решений с особой степенью.

Пример 2. *Укажем необходимые условия наличия полиномиальных решений у алгебраического дифференциального уравнения*

$$P_{04}(z)w^{(VII)}w^{(VI)}w' + P_{13}(z)w^{(VII)}(w''')^2 + P_{21}(z)w^{(VIII)}w'''w'' +$$
$$+ P_{32}(z)w^{(VIII)}w^{(IV)}w + P_{45}(z)w^{(X)}w^{(V)}w + \tag{12}$$
$$+ P_{54}(z)w^{(X)}(w'')^2 + P_{61}(z)w^{(IV)}w + P_{74}(z)w^{(XV)}\big(w^{(V)}\big)^3 = 0,$$

где P_{ij} *— полиномы с лексикографическим расположением членов*

$$P_{ij}(z) = \beta_{ij}z^j + \ldots, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ \beta_{ij} \neq 0, \ i = \overline{0,7}. \tag{13}$$

Уравнение (12) состоит из восьми членов с порядками

$$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l}_1 = 7, \quad \mathfrak{l}_2 = \mathfrak{l}_3 = 8, \quad \mathfrak{l}_4 = \mathfrak{l}_5 = 10, \quad \mathfrak{l}_6 = 4, \quad \mathfrak{l}_7 = 15.$$

Число

$$\mathfrak{l} = \max_{i=\overline{0,7}} \{\mathfrak{l}_i\} = \max\{7, 8, 10, 4, 15\} = 15$$

определяет порядок уравнения (12).

Число

$$\ell = \min_{i=\overline{0,7}} \{\mathfrak{l}_i\} = \min\{7, 8, 10, 4, 15\} = 4.$$

Тогда любые полиномы степеней $0, 1, 2$ и 3 будут тривиальным полиномиальным решением уравнения (12).

В дифференциальном уравнении (12) только один член имеет наименьший порядок $\ell = \mathfrak{l}_6 = 4$ и нет членов порядков 5 и 6.

Поэтому у уравнения (12) нет полиномиальных решений четвёртой, пятой и шестой степеней.

Полином седьмой степени является решением уравнения (12) тогда и только тогда, когда он является решением уравнения

$$P_{04}(z)w^{(VII)}w^{(VI)}w' + P_{13}(z)w^{(VII)}(w''')^2 + P_{61}(z)w^{(IV)}w = 0 \tag{14}$$

с коэффициентами (13) при $i = 0, \ i = 1, \ i = 6.$

Для уравнения (14) характеристики:

$$\varkappa_0 = 3, \ \varkappa_1 = 3, \ \varkappa_2 = 2, \ \mathfrak{m}_0 = 14, \ \mathfrak{m}_1 = 13, \ \mathfrak{m}_2 = 4,$$

$$b_0 = 4, \ b_1 = 3, \ b_2 = 1, \ \mathfrak{n}_0 = -10, \ \mathfrak{n}_1 = -10, \ \mathfrak{n}_2 = -3.$$

Число

$$^{0}m^2 = \frac{-10-(-3)}{2-3} = 7,$$

а функции степени при $m=7$ принимают равные значения:

$$S_0(7) = S_1(7) = S_2(7) = 11.$$

Следовательно, выполняются условия теоремы 2.2, и число 7 может быть неособой степенью полиномиальных решений уравнения (14), а значит, и уравнения (12).

Поскольку абсолютные веса $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_1 = -10$, а функции степени $S_i(7) = 11,\ i=\overline{0,2}$, то выполняются условия (5), но не выполняются им соответствующие условия (6).

Стало быть, число 7 не является особой степенью полиномиальных решений как уравнения (14), так и уравнения (12).

Непосредственно из уравнения (14) находим, что если $m=7$ будет неособой степенью полиномиального решения (1.2) уравнения (12), то коэффициент α_7 его высшего члена является корнем уравнения

$$2^3 3^3 7^2 5(4\beta_{04} + 5\beta_{13})\alpha_7 + \beta_{61} = 0.$$

Ввиду того, что уравнение (12) имеет члены порядка $\mathfrak{l}_2 = \mathfrak{l}_3 = 8$, не имеет членов порядка девять и имеет члены порядка $\mathfrak{l}_4 = \mathfrak{l}_5 = 10$, полиномы восьмой и девятой степеней будут решениями уравнения (12) тогда и только тогда, когда они являются решениями уравнения

$$\begin{gathered} P_{04}(z)w^{(VII)}w^{(VI)}w' + P_{13}(z)w^{(VII)}(w''')^2 + \\ + P_{21}(z)w^{(VIII)}w'''w'' + P_{32}(z)w^{(VIII)}w^{(IV)}w + P_{61}(z)w^{(IV)}w = 0 \end{gathered} \qquad (15)$$

с коэффициентами (13) при $i=\overline{0,3}$ и $i=6$.

Для уравнения (15) характеристики:

$$\varkappa_0 = 3,\ \varkappa_1 = 3,\ \varkappa_2 = 3,\ \varkappa_3 = 3,\ \varkappa_4 = 2,$$

$$\mathfrak{m}_0 = 14,\ \mathfrak{m}_1 = 13,\ \mathfrak{m}_2 = 13,\ \mathfrak{m}_3 = 12,\ \mathfrak{m}_4 = 4,$$

$$b_0 = 4,\ b_1 = 3,\ b_2 = 1,\ b_3 = 2,\ b_4 = 1,$$

$$\mathfrak{n}_0 = -10,\ \mathfrak{n}_1 = -10,\ \mathfrak{n}_2 = -12,\ \mathfrak{n}_3 = -10,\ \mathfrak{n}_4 = -3.$$

Функции степени членов уравнения (15)

$$S_\tau : m \to 3m - 10,\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geqslant 7,\ \tau = 0,\ \tau = 1,$$

$$S_2 : m \to 3m - 12,\ S_3 : m \to 3m - 10,\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geqslant 8,$$

$$S_4 : m \to 2m - 3,\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geqslant 4,$$

при $m = 8$ и $m = 9$ принимают значения такие, что

$$S_\theta(8) = 14 > S_4(8) = 13 > S_2(8) = 12,\ \theta = 0,\ \theta = 1,\ \theta = 3,$$

$$S_\theta(9) = 17 > S_\lambda(9) = 15,\ \theta = 0,\ \theta = 1,\ \theta = 3,\ \lambda = 2,\ \lambda = 4.$$

В уравнении (15) члены с номерами 0,1 и 3 имеют равные размерности: $\varkappa_0 = \varkappa_1 = \varkappa_3 = 3.$

В соответствии с определением 3.2 уравнение (15) и, следовательно, уравнение (12) не имеют полиномиальных решений с неособыми степенями $m = 8$ и $m = 9.$

Для уравнения (15) выполняются условия (7):

$$\varkappa_0 = \ldots = \varkappa_3 = 3 \neq \varkappa_4 = 2,\ \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_3 = -10 > \mathfrak{n}_2 = -12,$$

и условия (6) при $m_t = 8$ и $m_t = 9.$

Поэтому в соответствии с теоремой 3, если числа 8 и 9 являются особыми степенями полиномиальных решений уравнения (12), то они будут корнями уравнения

$$\beta_{04} m^4 + (\beta_{13} - 12\beta_{04}) m^3 + (47\beta_{04} - 3\beta_{13} + \beta_{32}) m^2 +$$

$$+ 2(\beta_{13} - 30\beta_{04} - 5\beta_{32}) m + 21\beta_{32} = 0.$$

Уравнение (12) имеет члены порядка $\mathfrak{l}_4 = \mathfrak{l}_5 = 10,$ не имеет членов порядков 11, 12, 13, 14 и имеет член порядка $\mathfrak{l}_7 = 15.$

Следовательно, полиномы степеней 10, 11, 12, 13 и 14 являются решениями уравнения (12) тогда и только тогда, когда они являются решениями алгебраического дифференциального уравнения

$$\begin{gathered} P_{04}(z) w^{(VII)} w^{(VI)} w' + P_{13}(z) w^{(VII)} (w''')^2 + \\ + P_{21}(z) w^{(VIII)} w''' w'' + P_{32}(z) w^{(VIII)} w^{(IV)} w + \\ + P_{45}(z) w^{(X)} w^{(V)} w + P_{54}(z) w^{(X)} (w'')^2 + P_{61}(z) w^{(IV)} w = 0 \end{gathered} \qquad (16)$$

с коэффициентами (13) при $i=\overline{0,6}$.

Для уравнения (16) характеристики:

$$\varkappa_0=3,\ \varkappa_1=3,\ \varkappa_2=3,\ \varkappa_3=3,\ \varkappa_4=3,\ \varkappa_5=3,\ \varkappa_6=2;$$

$$\mathfrak{m}_0=14,\ \mathfrak{m}_1=13,\ \mathfrak{m}_2=13,\ \mathfrak{m}_3=12,\ \mathfrak{m}_4=15,\ \mathfrak{m}_5=14,\ \mathfrak{m}_6=4;$$

$$b_0=4,\ b_1=3,\ b_2=1,\ b_3=2,\ b_4=5,\ b_5=4,\ b_6=1;$$

$$\mathfrak{n}_0=-10,\ \mathfrak{n}_1=-10,\ \mathfrak{n}_2=-12,\ \mathfrak{n}_3=-10,$$

$$\mathfrak{n}_4=-10,\ \mathfrak{n}_5=-10,\ \mathfrak{n}_6=-3.$$

Функции степени членов уравнения (16)

$$S_\tau: m\to 3m-10,\ \forall m\in\mathbb{N},\ m\geqslant 7,\ \tau=0,\ \tau=1,$$

$$S_2: m\to 3m-12,\ S_3: m\to 3m-10,\ \forall m\in\mathbb{N},\ m\geqslant 8,$$

$$S_\theta: m\to 3m-10,\ \forall m\in\mathbb{N},\ m\geqslant 10,\ \theta=4, \theta=5,$$

$$S_6: m\to 2m-3,\ \forall m\in\mathbb{N},\ m\geqslant 4,$$

при $m=\overline{10,\,14}$ принимают такие значения, что

$$S_\xi(10)=20>S_2(10)=18>S_6(10)=17,$$

$$S_\xi(11)=23>S_2(11)=21>S_6(11)=19,$$

$$S_\xi(12)=26>S_2(12)=24>S_6(12)=21,$$

$$S_\xi(13)=29>S_2(13)=27>S_6(13)=23,$$

$$S_\xi(14)=32>S_2(14)=30>S_6(14)=25,\ \xi=\overline{0,5}\,, \xi\neq 2.$$

В уравнении (16) члены с номерами 0, 1, 3, 4 и 5 имеют равные размерности $\varkappa_0=\varkappa_1=\varkappa_3=\varkappa_4=\varkappa_5=3$.

В соответствии с определением 3.2 уравнение (16) и, следовательно, уравнение (12) не имеют полиномиальных решений с неособыми степенями $m\in\{10,\ldots,14\}$.

Для уравнения (16) выполняются условия (7):

$$\varkappa_0 = \ldots = \varkappa_5 = 3 \neq \varkappa_6 = 2,$$

$$\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_4 = \mathfrak{n}_5 = -10 > \mathfrak{n}_2 = -12,$$

и условия (6) при $m_t = \overline{10,\ 14}$.

В соответствии с теоремой 3, если числа $m \in \{10, \ldots, 14\}$ являются особыми степенями полиномиальных решений уравнения (12), то они будут корнями уравнения

$$\begin{gathered}\beta_{45} m^6 + (\beta_{04} - 33\beta_{45} + \beta_{54}) m^5 + (\beta_{13} - 14\beta_{04} + 433\beta_{45} - \\ -25\beta_{54}) m^4 + (71\beta_{04} - 5\beta_{13} + \beta_{32} - 2871\beta_{45} + 215\beta_{54}) m^3 + \\ +(8\beta_{13} - 154\beta_{04} - 12\beta_{32} + 10078\beta_{45} - 695\beta_{54}) m^2 + (120\beta_{04} - \\ -4\beta_{13} + 41\beta_{32} - 17688\beta_{45} + 504\beta_{54}) m + 12096\beta_{45} - 42\beta_{32} = 0.\end{gathered} \tag{17}$$

Рассмотрим наличие полиномиальных решений степеней $m \geqslant 15$ у дифференциального уравнения 15-го порядка (12).

Заметим, что

$$S_7(m) = 4m - 26 > S_\tau(m),\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \geqslant 17,\ \tau = \overline{0,\ 6}.$$

Следовательно, уравнение (12) не имеет полиномиальных решений (1.2) со степенями $\deg w(z) > 16$.

При $m = 15$ значения функций степени членов уравнения (12) таковы, что при $\xi = \overline{0, 5}$, $\xi \neq 2$,

$$S_\xi(15) = 35 > S_7(15) = 34 > S_2(15) = 33 > S_6(15) = 27.$$

Характеристики

$$\varkappa_0 = \ldots = \varkappa_5 = 3 \neq \varkappa_\tau,\ \tau = 6,\ \tau = 7,\ \varkappa_6 = 2,\ \varkappa_7 = 4,$$

$$\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_4 = \mathfrak{n}_5 = -10 > \mathfrak{n}_2 = -12.$$

В соответствии с определением 3.2 уравнение (12) не имеет полиномиальных решений с неособой степенью $m = 15$, а в соответствии с теоремой 3, если $m = 15$ есть особая степень полиномиального решения уравнения (12), то число 15 будет корнем уравнения (17).

При $m = 16$ у членов уравнения (12) значения функций степени

$$S_\theta(16) = 38 > S_2(16) = 36 > S_6(16) = 29,\ \theta = \overline{0,7}\,, \theta \neq 2,\ \theta \neq 6,$$

а размерности

$$\varkappa_0 = \ldots = \varkappa_5 = 3 \neq \varkappa_7 = 4.$$

Значит, если дифференциальное уравнение (12) имеет полиномиальные решения 16-й степени, то эта степень неособая (в соответствии с теоремой 2.2).

Если полином (1.2) — решение с неособой степенью $m = 16$, то коэффициент α_{16} его высшего члена будет корнем уравнения

$$2^{23} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 13^3 \beta_{74} \alpha_{16} + 2^6 \cdot 11 \cdot 13 \beta_{04} + 2^5 \cdot 5 \cdot 7 \beta_{13} +$$

$$+ 3 \cdot 13 \beta_{32} + 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \beta_{45} + 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \beta_{54} = 0.$$

Пример 3. *Укажем необходимые условия наличия полиномиальных решений у алгебраического дифференциального уравнения*

$$\begin{gathered} P_{04}(z) w''' w'' w' + P_{15}(z) w''' (w'')^2 + P_{27}(z) w^{(V)} w^{(IV)} w + \\ + P_{37}(z) w^{(V)} (w'')^2 + P_{47}(z) w^{(V)} w''' w' + P_{51}(z) w' + P_{60}(z) w = 0, \end{gathered} \tag{18}$$

где коэффициенты P_{ij} *— полиномы с лексикографическим расположением членов*

$$P_{ij}(z) = \beta_{ij} z^j + \ldots\,,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \beta_{ij} \neq 0,\ i = \overline{0,6}\,.$$

У уравнения (18) члены имеют порядки:

$$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l}_1 = 3,\ \mathfrak{l}_2 = \mathfrak{l}_3 = \mathfrak{l}_4 = 5,\ \mathfrak{l}_5 = 1,\ \mathfrak{l}_6 = 0.$$

Поскольку

$$\ell = \min_{i=\overline{0,\,6}} \{\mathfrak{l}_i\} = \min\{3,\ 5,\ 1,\ 0\} = 0,$$

то уравнение (18) не имеет тривиальных полиномиальных решений.

Нулевой полином является решением уравнения (18).

Характеристики членов уравнения (18):

$$\varkappa_0 = 3,\ \varkappa_1 = 3,\ \varkappa_2 = 3,\ \varkappa_3 = 3,\ \varkappa_4 = 3,\ \varkappa_5 = 1,\ \varkappa_6 = 1;$$

$$\mathfrak{m}_0 = 6,\ \mathfrak{m}_1 = 7,\ \mathfrak{m}_2 = 9,\ \mathfrak{m}_3 = 9,\ \mathfrak{m}_4 = 9,\ \mathfrak{m}_5 = 1,\ \mathfrak{m}_6 = 0;$$

$$b_0 = 4,\ b_1 = 5,\ b_2 = 7,\ b_3 = 7,\ b_4 = 7,\ b_5 = 1,\ b_6 = 0;$$

$$\mathfrak{n}_0 = -2,\ \mathfrak{n}_1 = -2,\ \mathfrak{n}_2 = -2,\ \mathfrak{n}_3 = -2,\ \mathfrak{n}_4 = -2,\ \mathfrak{n}_5 = 0,\ \mathfrak{n}_6 = 0.$$

Числа

$${}^{i}m^{j} = 1,\ i = \overline{0,\,4}\,,\ j = 5,\ j = 6.$$

Так как

$$\max\{\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_5, \mathfrak{l}_6\} = \max\{3,\,1,\,0\} = 3,\ \max_{\zeta=\overline{2,6}}\{\mathfrak{l}_\zeta\} = \max\{5,\,1,\,0\} = 5,$$

то в силу теоремы 1.2 уравнение (18) не имеет полиномиальных решений с неособыми степенями.

В уравнении (18) два блока членов с равными размерностями:

$$\varkappa_0^1 = \varkappa_1^1 = \varkappa_2^1 = \varkappa_3^1 = \varkappa_4^1 = 3 \quad \text{и} \quad \varkappa_5^2 = \varkappa_6^2 = 1.$$

В зависимости от порядков $\mathfrak{l}_i$ членов уравнения (18) в каждом из блоков выделим классы следующим образом:

$$1.1.\ \mathfrak{l}_0^1 = \mathfrak{l}_1^1 = 3; \quad 1.2.\ \mathfrak{l}_2^1 = \mathfrak{l}_3^1 = \mathfrak{l}_4^1 = 5; \quad 2.1.\ \mathfrak{l}_6^2 = 0; \quad 2.2.\ \mathfrak{l}_5^2 = 1.$$

Отыскание особых степеней целесообразно начинать с того блока, который содержит члены с наименьшими порядками. Поэтому начнём со второго блока.

Шаг 2.1. При $0 \leqslant m < 1,$ то есть, при $m = 0$ получаем, что

$$P_{60}(z)w = 0, \quad \text{где} \quad P_{60}(z) \neq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Поэтому полиномиальных решений с особой степенью $m = 0$ у уравнения (18) нет.

Шаг 2.2. При $1 \leqslant m < 3$ на основании «укороченного» уравнения

$$P_{51}(z)w' + P_{60}(z)w = 0$$

составляем равенство

$$\beta_{51}m + \beta_{60} = 0. \tag{19}$$

Ввиду того, что

$$\varkappa_5^2 = \varkappa_6^2 = 1, \ \ S_5^2(m) = S_6^2(m) = m$$

при $m=1$ и $m=2$, заключаем: если числа $m=1$ и $m=2$ являются особыми степенями полиномиального решения (1.2) уравнения (18), то они будут корнями уравнения (19).

Шаг 1.1. При $3 \leqslant m < 5$ составляем уравнение

$$\beta_{15}m + \beta_{04} - \beta_{15} = 0. \tag{20}$$

Поскольку

$$\varkappa_0^1 = \varkappa_1^1 = 3 > \varkappa_5 = \varkappa_6 = 1,$$

$$S_0^1(m) = S_1^1(m) = 3m - 2 > S_5(m) = S_6(m) = m$$

при $m=3$ и $m=4$, то получаем: если числа $m=3$ и $m=4$ являются особыми степенями полиномиального решения (1.2) уравнения (18), то они будут корнями уравнения (20).

Шаг 1.2. При $m \geqslant 5$ составляем уравнение

$$\begin{aligned}(\beta_{27}+\beta_{37}+\beta_{47})m^4-(12\beta_{27}+8\beta_{37}+9\beta_{47})m^3+(\beta_{15}+53\beta_{27}+19\beta_{37}+\\ +26\beta_{47})m^2 + (\beta_{04} - \beta_{15} - 102\beta_{27} - 12\beta_{37} - 24\beta_{47})m + 72\beta_{27} = 0.\end{aligned} \tag{21}$$

Так как

$$\varkappa_0^1 = \ldots = \varkappa_4^1 = 3 > \varkappa_5 = \varkappa_6 = 1, \ S_0^1(m) = \ldots =$$

$$= S_4^1(m) = 3m - 2 > S_5(m) = S_6(m) = m, \ \forall m \in \mathbb{N}, \ m \geqslant 5,$$

то числа $m \geqslant 5$, являющиеся особыми степенями полиномиального решения (1.2) уравнения (18), будут корнями уравнения (21).

§ 2. Границы изменения степеней полиномиальных решений

В данном параграфе будут указаны границы изменения степеней полиномов-решений (1.2.1) дифференциального уравнения (1.1.1) в зависимости от характеристик этого уравнения.

Особенность излагаемого метода, в отличие от приведённого в первом параграфе, состоит в том, что в основу рассуждения берётся только один член, а не все члены уравнения (1.1.1) сразу.

От того, в каком соотношении находится рассматриваемый член с остальными, зависят границы, в которых изменяются степени полиномов-решений.

Последовательно перебирая все члены дифференциального уравнения, каждый раз уточняем или подтверждаем границы изменения степеней полиномов-решений.

Естественно, речь будем вести о степенях нетривиальных полиномиальных решений.

Более того, будем полагать, что $m \geqslant \mathfrak{l}$, ибо в противном случае при подстановке в дифференциальное уравнение (1.1.1) полинома (1.2.1) в тождественный нуль обратятся все те члены (3.1.1), порядок которых больше m.

Если $m < \mathfrak{l}$, то будем рассматривать так называемое *укороченное* дифференциальное уравнение, то есть, уравнение (1.1.1) без членов (3.1.1), которые обращаются в тождественный нуль при подстановке в них полиномов (1.2.1) с такими степенями.

Отметим, что для укороченного дифференциального уравнения могут быть применены теоремы, которые будут доказаны при условии $m \geqslant \mathfrak{l}$. Такие возможности покажем на примерах.

1. Асимптотическая формула представления производных полинома

Метод установления границ, в которых изменяются степени полиномиальных решений алгебраического дифференциального уравнения, основан на следующей *асимптотической формуле производных полинома.*

Лемма 1. *Производная порядка* n *полинома* w *степени* m, $m \geqslant 0$, *представляется асимптотической формулой*

$$w^{(n)}(z) = (-1)^n(-m)_n \cdot \frac{w(z)}{z^n} \cdot (1 + \varepsilon_n(z)),\ \forall z \in G,\ G \subset \mathbb{C}, \quad (1)$$

где рациональная функция $\varepsilon_n : G \to \mathbb{C}$ *такова, что* $\varepsilon_0(z) = 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$, *и* $\varepsilon_n(z) \to 0$ *при* $z \to \infty$, *когда* $n \geqslant 1$; $(a)_n$ — *символ Похгаммера*[1].

Доказательство. Производная полинома с лексикографическим расположением членов (1.2.1) степени $m \geqslant 1$

$$w'(z) = m\alpha_m z^{m-1} + (m-1)\alpha_{m-1} z^{m-2} + \ldots + 2\alpha_2 z + \alpha_1,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Выполнив элементарные преобразования, получим

$$w'(z) = \frac{m}{z}\, w(z) - \frac{m}{z}\, w(z) + m\alpha_m z^{m-1} + \ldots + 2\alpha_2 z + \alpha_1 =$$

$$= \frac{m}{z} w(z) + \Big(-\alpha_{m-1} z^{m-2} - 2\alpha_{m-2} z^{m-3} - \ldots - (m-1)\alpha_1 - m\alpha_0 \frac{1}{z}\Big) =$$

$$= \frac{m}{z}\, w(z) + \frac{m}{z}\, w(z)\varepsilon_1(z) = \frac{m}{z}\, w(z)(1 + \varepsilon_1(z)),\ \forall z \in G,$$

где рациональная функция

$$\varepsilon_1 : z \to -\frac{1}{mw(z)} \cdot q(z),\ \forall z \in G,$$

а полином

$$q : z \to \alpha_{m-1} z^{m-1} + 2\alpha_{m-2} z^{m-2} + \ldots + (m-1)\alpha_1 z + m\alpha_0,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Итак, для полинома w степени $m \geqslant 1$ производная

$$w'(z) = \frac{m}{z}\, w(z)(1 + \varepsilon_1(z)),\ \forall z \in G, \quad (2)$$

[1] $(a)_n = a \cdot (a+1) \cdot \ldots \cdot (a+n-1),\ a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N};\ (a)_0 = 1.$

где ε_1 — рациональная функция и $\varepsilon_1(z) \to 0$ при $z \to \infty$.

Формула (2) есть формула (1) при $n = 1$.

Допустим, что формула (1) имеет место при $n = k$, т.е.

$$w^{(k)}(z) = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{z^k}\, w(z)(1 + \varepsilon_k(z)),\ \forall z \in G,$$

где рациональная функция $\varepsilon_k(z) \to 0$ при $z \to \infty$.

Тогда при любом z из множества G

$$w^{(k+1)}(z) = \mathsf{D}w^{(k)}(z) = \frac{m-k}{z}\, w^{(k)}(z)(1 + \tilde{\varepsilon}_1(z)) \ =$$

$$= \frac{m-k}{z} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{z^k} w(z)(1 + \varepsilon_k(z))(1 + \tilde{\varepsilon}_1(z)) =$$

$$= \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)(m-k)}{z^{k+1}}\, w(z)(1 + \varepsilon_{k+1}(z)),$$

где рациональные функции $\tilde{\varepsilon}_1 : G \to \mathbb{C}$ и $\varepsilon_{k+1} : G \to \mathbb{C}$ такие, что $\tilde{\varepsilon}_1(z) \to 0$ и $\varepsilon_{k+1}(z) \to 0$ при $z \to \infty$.

Стало быть, имеет место формула (1) при $n = k + 1$.

Тогда на основании метода математической индукции заключаем о справедливости формулы (1) для полиномов w степеней $m \geqslant n \geqslant 1$.

Так как $\varepsilon_0(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$, то формула (1) имеет место и в случае $m \geqslant n \geqslant 0$.

При $m < n$ символ Похгаммера $(-m)_n = 0$, производная

$$w^{(n)}(z) = 0,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Следовательно, формула (1) имеет место при любых целых неотрицательных m и n. ■

2. Нижняя и верхняя границы степеней полиномиальных решений

В алгебраическом дифференциальном уравнении (1.1.1) члены (3.1.1) располагаются одним из двух способов.

1. Размерности

$$\varkappa_\tau > \varkappa_p = \varkappa_{p+1} = \ldots = \varkappa_{p+s} = d_p > \varkappa_\eta,$$
$$\tau = \overline{0, p-1}\,,\ \eta = \overline{p+s+1, N}\,,\ 0 \leqslant p \leqslant N,\ 0 \leqslant s \leqslant N-p, \tag{1}$$

а абсолютные веса

$$\mathfrak{n}_p > \mathfrak{n}_{p+h},\ h = \overline{1, s}\,. \tag{2}$$

2. Для размерностей (1) при $p \neq N,\ s \neq 0$ абсолютные веса

$$\mathfrak{n}_p = \mathfrak{n}_{p+1} = \ldots = \mathfrak{n}_{p+\lambda} > \mathfrak{n}_{p+j},\ j = \overline{\lambda+1, s}\,,\ 1 \leqslant \lambda \leqslant s, \tag{3}$$

В каждом из этих случаев по членам (3.1.1) с номерами p, $p+1, \ldots, p+s$ определим нижнюю и верхнюю границы изменения степеней $m \geqslant \mathfrak{l}$ полиномов-решений (1.2.1) дифференциального уравнения (1.1.1) порядка $\mathfrak{l}$.

Введём условные обозначения:

$$\mathfrak{a}_p = \min\bigl\{{}^p m^\tau : \tau = 0, p-1\,\bigr\}$$

и

$$\mathfrak{b}_p = \max\bigl\{{}^p m^\eta : \eta = \overline{p+s+1, N}\,\bigr\}.$$

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (1) *и* (2). *Тогда справедливы утверждения:*

а) *при* $p = 0,\ s = N$ *степень* m *полиномиального решения* (2.1.1) *уравнения* (1.1.1) *меньше* $\mathfrak{l}_0$;

б) *при* $p = 0,\ 0 \leqslant s < N$ *степень* $m \geqslant \mathfrak{l}$ *полиномиального решения* (2.1.1) *уравнения* (1.1.1) *не превосходит* $\mathfrak{b}_0$;

в) *при* $0 < p \leqslant N,\ p+s = N$ *степень* $m \geqslant \mathfrak{l}$ *полиномиального решения* (2.1.1) *уравнения* (1.1.1) *не меньше* $\mathfrak{a}_p$;

г) *при* $0 < p < N,\ p + s < N$ *степень* $\mathfrak{l} \leqslant m < \mathfrak{a}_p$ *полиномиального решения* (2.1.1) *дифференциального уравнения* (1.1.1) *не превосходит* $\mathfrak{b}_p$;

д) *при* $0 < p < N,\ p + s < N$ *степень* $m \geqslant \mathfrak{l}$ *такая, что* $m > \mathfrak{b}_p$ *полиномиального решения* (2.1.1) *уравнения* (1.1.1) *не меньше* $\mathfrak{a}_p$.

Доказательство. Полином w степени $m \geqslant \mathfrak{l}$ является решением уравнения (1.1.1) тогда и только тогда, когда при его подстановке уравнение обращается в тождество. Это тождество преобразуем с учётом асимптотического представления (1.1.2) производной полинома $w,$ а затем выполним почленное деление на произведение

$$\widehat{K}_p(m) B_{\mu_p}(z) w^{d_p}(z) z^{-\mathfrak{m}_p}. \tag{4}$$

В результате получим тождество

$$\sum_{\tau=0}^{p-1} \frac{\widehat{K}_\tau(m)}{\widehat{K}_p(m)} \cdot \frac{B_{\mu_\tau}(z)}{B_{\mu_p}(z)} \cdot w^{\varkappa_\tau - d_p}(z) \cdot z^{\mathfrak{m}_p - \mathfrak{m}_\tau} (1 + \varepsilon_\tau(z)) +$$

$$+ \sum_{h=1}^{s} \frac{\widehat{K}_{p+h}(m)}{\widehat{K}_p(m)} \cdot \frac{B_{\mu_{p+h}}(z)}{B_{\mu_p}(z)} \cdot z^{\mathfrak{m}_p - \mathfrak{m}_{p+h}} (1 + \varepsilon_{p+h}(z)) + \tag{5}$$

$$+ \sum_{\eta=p+s+1}^{N} \frac{\widehat{K}_\eta(m)}{\widehat{K}_p(m)} \cdot \frac{B_{\mu_\eta}(z)}{B_{\mu_p}(z)} \cdot \frac{z^{\mathfrak{m}_p - \mathfrak{m}_\eta}}{w^{d_p - \varkappa_\eta}(z)} (1 + \varepsilon_\eta(z)) + 1 + \varepsilon_p(z) \equiv 0,$$

где рациональные функции $\varepsilon_i(z) \to 0$ при $z \to \infty,\ i = \overline{0, N}$.

Поскольку $\mathfrak{n}_p > \mathfrak{n}_{p+h},\ h = \overline{1, s}$, то

$$B_{\mu_{p+h}}(z) \cdot B_{\mu_p}^{-1}(z) \cdot z^{\mathfrak{m}_p - \mathfrak{m}_{p+h}} \to 0 \ \text{при}\ z \to \infty,\ h = \overline{1, s}. \tag{6}$$

Если $\varkappa_\tau m + \mathfrak{n}_\tau < d_p m + \mathfrak{n}_p,\ \tau = \overline{0, p-1}$, т.е. $m < \mathfrak{a}_p,$ то

$$\frac{B_{\mu_\tau}(z)}{B_{\mu_p}(z)} \cdot \frac{w^{\varkappa_\tau - d_p}(z)}{z^{\mathfrak{m}_\tau - \mathfrak{m}_p}} \to 0 \ \text{при}\ z \to \infty, \quad \tau = \overline{0, p-1}\,. \quad (7)$$

Если $\varkappa_\eta m + \mathfrak{n}_\eta < d_p m + \mathfrak{n}_p$, $\eta = \overline{p+s+1, N}$, т.е. $m > \mathfrak{b}_p$, то

$$\frac{B_{\mu_\eta}(z)}{B_{\mu_p}(z)} \cdot \frac{w^{\varkappa_\eta - d_p}(z)}{z^{\mathfrak{m}_\eta - \mathfrak{m}_p}} \to 0, \ \text{при}\ z \to \infty, \quad \eta = \overline{p+s+1, N}\,. \quad (8)$$

Пусть $p = 0$, $s = N$. Тогда, переходя в (5) к пределу при $z \to \infty$, с учётом (6) получаем противоречие, которое может быть устранено при $m < \mathfrak{l}_0$. Это доказывает утверждение а).

Пусть $p = 0$, $0 \leqslant s < N$. Тогда, переходя в (5) к пределу при $z \to \infty$, в случае $s = 0$ на основании (8), а в случае $0 < s < N$ на основании (6) и (8), всякий раз получаем противоречие. Тем самым доказываем утверждение б).

Пусть $0 < p \leqslant N$, $p + s = N$. Тогда, переходя в (5) к пределу при $z \to \infty$, в случае $s = 0$ на основании (7), а в случае $s > 0$ на основании (6) и (7), всякий раз получаем противоречие. Тем самым доказываем утверждение в).

Пусть $0 < p \leqslant N$, $p + s < N$, и $m < \mathfrak{a}_p$. Тогда, переходя в (5) к пределу при $z \to \infty$, в случае $s = 0$ на основании (7) и (8), а в случае $s > 0$ на основании (6), (7) и (8), всякий раз получаем противоречие. Тем самым доказываем утверждение г).

Пусть $0 < p < N$, $p + s < N$, и $m > \mathfrak{b}_p$. Тогда, переходя в (5) к пределу при $z \to \infty$, в случае $s = 0$ на основании (7) и (8), а в случае $s > 0$ на основании (6), (7) и (8), всякий раз получаем противоречие. Тем самым доказываем утверждение д). ■

Из утверждения б) при $s = 0$ теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Если уравнение* (1.1.1) *содержит только один доминирующий член с номером* $p \in \{0, 1, \ldots, N\}$, *то степень* $m \geqslant \mathfrak{l}$ *полиномиального решения удовлетворяет неравенству*

$$m \leqslant \max\bigl\{{}^p m^i \colon i = \overline{0, N}\,,\ i \neq p\bigr\}.$$

Из утверждения в) при $s = 0$ теоремы 1 получаем

Следствие 2. *Если уравнение* (1.1.1) *содержит только один минорирующий член с номером* $p \in \{0, 1, \ldots, N\}$, *то* *степень* $m \geqslant \mathfrak{l}$ *полиномиального решения удовлетворяет неравенству*

$$m \geqslant \min\{{}^{p}m^{i}\colon i=\overline{0,N}\,,\ i\neq p\}.$$

Пример 1. *Найдём множество степеней полиномиальных решений алгебраического дифференциального уравнения*

$$(w'')^2(w')^3-26z^3w(w'')^2-6z^5ww'''=0. \qquad (9)$$

Уравнение (9) имеет характеристики:

$$\varkappa_0=5,\ \varkappa_1=3,\ \varkappa_2=2;\quad \mathfrak{m}_0=7,\ \mathfrak{m}_1=4,\ \mathfrak{m}_2=3;$$

$$\mathfrak{n}_0=\,-7,\ \mathfrak{n}_1=\,-1,\ \mathfrak{n}_2=2;\quad \mathfrak{l}_0=2,\ \mathfrak{l}_1=2,\ \mathfrak{l}_2=3.$$

Дифференциальное уравнение (9) имеет только один доминирующий член с номером $p=0$. По следствию 1, степени $m\geqslant \mathfrak{l}=\mathfrak{l}_2=3$ полиномиальных решений удовлетворяют неравенству

$$m\leqslant \max\{{}^{0}m^{j}\colon j=1,\ j=2\}=\max\{3,\,3\}=3.$$

Следовательно, среди чисел $m\geqslant 3$ только число $m=3$ может быть степенью полиномиальных решений уравнения (9).

Непосредственно подстановкой полинома

$$w\colon z\to a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0,\ \forall z\in\mathbb{C},\ (a_3\neq 0)$$

в уравнение (9) устанавливаем, что его полиномиальными решениями третьей степени будут

$$w_1: z\to z^3,\ \forall z\in\mathbb{C},\ \ w_2: z\to \Big(\frac{\sqrt{69}}{18}-\frac{1}{2}\Big)z^3,\ \forall z\in\mathbb{C},$$

$$w_3: z\to\,-\Big(\frac{\sqrt{69}}{18}+\frac{1}{2}\Big)z^3,\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

При $m=2$ рассмотрим укороченое уравнение

$$(w'')^2(w')^3-26z^3w(w'')^2=0, \qquad (10)$$

которое получается из дифференциального уравнения (9) отбрасыванием члена с номером два.

Уравнение (10) имеет характеристики:

$$\varkappa_0^1 = 5,\ \varkappa_1^1 = 3;\ \mathfrak{m}_0^1 = 7,\ \mathfrak{m}_1^1 = 4;\ \mathfrak{n}_0^1 = -7,\ \mathfrak{n}_1^1 = -1;\ \mathfrak{l}_0^1 = 2,\ \mathfrak{l}_1^1 = 2.$$

Дифференциальное уравнение (10) имеет только один минорирующий член с номером $p = 1$. По следствию 2, степени $m \geqslant \mathfrak{l}^1 = 2$ полиномиальных решений удовлетворяют неравенству

$$m \geqslant {}^0m^1 = 3.$$

Значит, у уравнения (9) нет полиномов-решений второй степени.

Поскольку

$$\ell = \min\{\mathfrak{l}_i : i = \overline{0,2}\} = 2,$$

то полиномы степеней $m = 0$ и $m = 1$ являются тривиальными полиномиальными решениями уравнения (9).

Таким образом, число $m = 3$ является степенью трёх нетривиальных полиномиальных решений, а числа 0 и 1 являются степенями тривиальных полиномиальных решений дифференциального уравнения (9).

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (1) *и* (3). *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) *при* $p = 0,\ s = N$ *степень* $m \geqslant \mathfrak{l}$ *полиномиального решения* (1.2.1) *уравнения* (1.1.1) *является корнем уравнения*

$$\sum_{\xi=0}^{\lambda} \widetilde{K}_{p+\xi}(m) = 0; \tag{11}$$

б) *при* $p = 0,\ 0 < s < N$ *степень* $m \geqslant \mathfrak{l}$ *такая, что* $m > \mathfrak{b}_0$, *полиномиального решения* (1.2.1) *уравнения* (1.1.1) *является корнем уравнения* (11);

в) *при* $0 < p < N,\ p + s = N$ *степень* m *такая, что* $\mathfrak{l} \leqslant m < \mathfrak{a}_p$, *полиномиального решения* (1.2.1) *уравнения* (1.1.1) *является корнем уравнения* (11);

г) *при* $0 < p < N,\ p + s < N$ *степень* $m \geqslant \mathfrak{l}$ *такая, что* $\mathfrak{b}_p < m < \mathfrak{a}_p$, *полиномиального решения* (1.2.1) *уравнения* (1.1.1) *является корнем уравнения* (11).

Доказательство. Учитывая условия, накладываемые на члены уравнения (1.1.1) в данной теореме, рассуждениями, аналогичными использованным при доказательстве теоремы 1, получаем тождество

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\tau=0}^{p-1} \frac{\widehat{K}_\tau(m)}{\widehat{K}_p(m)} \cdot \frac{B_{\mu_\tau}(z)}{B_{\mu_p}(z)} \cdot \frac{w^{\varkappa_\tau - d_p}(z)}{z^{\mathfrak{m}_\tau - \mathfrak{m}_p}} (1 + \varepsilon\tau(z)) + 1 + \varepsilon p(z) + \\
&+ \sum_{h=1}^{\lambda} \frac{\widehat{K}_{p+h}(m)}{\widehat{K}_p(m)} \cdot \frac{B_{\mu_{p+h}}(z)}{B_{\mu_p}(z)} \cdot z^{\mathfrak{m}_p - \mathfrak{m}_{p+h}} (1 + \varepsilon_{p+h}(z)) + \\
&+ \sum_{j=\lambda+1}^{s} \frac{\widehat{K}_{p+j}(m)}{\widehat{K}_p(m)} \cdot \frac{B_{\mu_{p+j}}(z)}{B_{\mu_p}(z)} \cdot z^{\mathfrak{m}_p - \mathfrak{m}_{p+j}} (1 + \varepsilon_{p+j}(z)) + \\
&+ \sum_{\eta=p+s+1}^{N} \frac{\widehat{K}_\eta(m)}{\widehat{K}_p(m)} \cdot \frac{B_{\mu_\eta}(z)}{B_{\mu_p}(z)} \cdot \frac{z^{\mathfrak{m}_p - \mathfrak{m}_\eta}}{w^{d_p - \varkappa_\eta}(z)} (1 + \varepsilon_\eta(z)) \equiv 0,
\end{aligned}
\tag{12}
$$

где рациональные функции $\varepsilon_i(z) \to 0$ при $z \to \infty$, $i = \overline{0, N}$.

Поскольку $\mathfrak{n}_p = \mathfrak{n}_{p+1} = \ldots = \mathfrak{n}_{p+\lambda}$, то

$$
\frac{B_{\mu_{p+h}}(z)}{B_{\mu_p}(z)} \cdot z^{\mathfrak{m}_p - \mathfrak{m}_{p+h}} \to \frac{\beta_{p+h}}{\beta_p}, \ \text{при } z \to \infty, \quad h = \overline{1, \lambda}. \tag{13}
$$

Поскольку $\mathfrak{n}_p > \mathfrak{n}_{p+j}$, $j = \overline{\lambda+1, s}$, то

$$
\frac{B_{\mu_{p+j}}(z)}{B_{\mu_p}(z)} \cdot z^{\mathfrak{m}_p - \mathfrak{m}_{p+j}} \to 0, \ \text{при } z \to \infty, \quad j = \overline{\lambda+1, s}. \tag{14}
$$

Если $\varkappa_\tau m + \mathfrak{n}_\tau < d_p m + \mathfrak{n}_p$, $\tau = \overline{0, p-1}$, т.е. $m < \mathfrak{a}_p$, то при $z \to \infty$ имеет место соотношение (7).

Если $\varkappa_\eta m + \mathfrak{n}_\eta < d_p m + \mathfrak{n}_p$, $\eta = \overline{p+s+1, N}$, т.е. $m > \mathfrak{b}_p$, то при $z \to \infty$ имеет место соотношение (8).

Пусть $p = 0$, $s = N$. Тогда, переходя в тождестве (12) к пределу при $z \to \infty$, в случае $\lambda = s$ на основании (13), а в случае $1 \leqslant \lambda < s$ на основании (13) и (14), всякий раз получаем равенство (11). Это доказывает утверждение а).

Пусть $p = 0$, $0 < s < N$. Тогда, переходя в тождестве (12) к пределу при $z \to \infty$, в случае $\lambda = s$ на основании (8) и (13), а в случае $1 \leqslant \lambda < s$ на основании (8), (13) и (14), всякий раз получаем равенство (11). Это доказывает утверждение б).

Пусть $0 < p < N$, $p + s = N$. Тогда, переходя в тождестве (12) к пределу при $z \to \infty$, в случае $\lambda = s$ на основании (7) и (13), а в случае $1 \leqslant \lambda < s$ на основании (7), (13) и (14), всякий раз получаем равенство (11). Это доказывает утверждение в).

Пусть $0 < p < N$, $p + s < N$. Тогда, переходя в тождестве (12) к пределу при $z \to \infty$, в случае $\lambda = s$ на основании (7), (8) и (13), а в случае $1 \leqslant \lambda < s$ на основании (7), (8), (13) и (14), всякий раз получаем равенство (11). Это доказывает утверждение г). ■

Пример 2. *Найдём множество целых неотрицательных чисел, которому принадлежат степени полиномиальных решений алгебраического дифференциального уравнения*

$$P_{03}(z)w^{(XVIII)}\bigl(w^{(VI)}\bigr)^2 w''' + P_{14}(z)w^{(X)}\bigl(w''\bigr)^2 +$$
$$+ P_{25}(z)w^{(X)}w^{(V)}w + P_{33}(z)w^{(VII)}\bigl(w'''\bigr)^2 + P_{44}(z)w^{(VII)}w^{(VI)}w' + \quad (15)$$
$$+ P_{53}(z)w^{(IV)}w + P_{64}(z)w'''w'' + P_{7,10}(z)w^{(V)} = 0,$$

где P_{ij} *— полиномы с лексикографическим расположением членов*

$$P_{ij}(z) = \beta_{ij}z^j + \ldots\,,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \beta_{ij} \ne 0,\ i = \overline{0,7}\,.$$

У членов уравнения (15) размерности

$$\varkappa_0 = 4,\ \varkappa_1 = \ldots = \varkappa_4 = 3,\ \varkappa_5 = \varkappa_6 = 2,\ \varkappa_7 = 1.$$

По утверждению б) теоремы 1, из того, что

$$\varkappa_0 = d_0 > \varkappa_\eta,\ \eta = \overline{1,7}\,,$$

следует, что у полиномов-решений w степени $m \geqslant \mathfrak{l} = 18$ удовлетворяют неравенству

$$m \leqslant \mathfrak{b}_0 = \max\{{}^{\eta}m^0 \colon \eta = \overline{1,7}\} = \max\Big\{20,\ 14\frac{1}{2},\ 11\frac{2}{3}\Big\} = 20.$$

Таким образом, степени полиномиальных решений уравнения (15) не превышают 20.

В соответствии с утверждением г) теоремы 2 из того, что

$$\varkappa_\tau = \varkappa_0 > \varkappa_1 = \ldots = \varkappa_4 = d_1 > \varkappa_\eta,\ \eta = \overline{5,\,7}\,;$$

$$\mathfrak{n}_1 = \ldots = \mathfrak{n}_4 = -10,\ \mathfrak{a}_1 = 20,\ \mathfrak{b}_1 = \max\Big\{9,\ 7\frac{1}{2}\Big\} = 9,$$

получаем: степени $m = 18$ и $m = 19$ полиномов-решений уравнения (15) являются корнями уравнения

$$\begin{gathered}\beta_{25}m^6 + (\beta_{14} - 33\beta_{25} + \beta_{44})m^5 + (433\beta_{25} - 25\beta_{14} + \\ + \beta_{33} - 14\beta_{44})m^4 + (215\beta_{14} - 2871\beta_{25} - 5\beta_{33} + 71\beta_{44})m^3 + \\ + (10078\beta_{25} - 695\beta_{14} + 8\beta_{33} - 154\beta_{44})m^2 + \\ + (504\beta_{14} - 17688\beta_{25} - 4\beta_{33} + 120\beta_{44})m + 12096\beta_{25} = 0.\end{gathered} \tag{16}$$

При $10 \leqslant m \leqslant 17$ рассмотрим укороченное уравнение

$$\begin{gathered}P_{14}(z)w^{(X)}\big(w''\big)^2 + P_{25}(z)w^{(X)}w^{(V)}w + \\ + P_{33}(z)w^{(VII)}\big(w'''\big)^2 + P_{44}(z)w^{(VII)}w^{(VI)}w' + \\ + P_{53}(z)w^{(IV)}w + P_{64}(z)w'''w'' + P_{7,10}(z)w^{(V)} = 0,\end{gathered} \tag{17}$$

которое получается из уравнения (15) путём отбрасывания члена с номером $i = 0$.

У членов уравнения (17) размерности

$$\varkappa_0^1 = \varkappa_1^1 = \varkappa_2^1 = \varkappa_3^1 = 3,\ \ \varkappa_4^1 = \varkappa_5^1 = 2,\ \varkappa_6^1 = 1,$$

при этом $d_0^1 = 3 > \varkappa_\eta^1,\ \eta = \overline{4,6}$, а

$$\mathfrak{n}_0^1 = \ldots = \mathfrak{n}_3^1 = -10,\ \ \mathfrak{l}^1 = 10,\ \ \mathfrak{b}_0^1 = \max\Big\{9,\ 7\frac{1}{2}\Big\} = 9.$$

Согласно утверждению б) теоремы 2 у полиномиальных решений w дифференциального уравнения (15) степени $m \in \{10, \ldots, 17\}$ являются корнями уравнения (16).

При $7 \leqslant m \leqslant 9$ рассмотрим укороченное уравнение

$$\begin{gathered} P_{33}(z)w^{(VII)}\left(w'''\right)^2 + P_{44}(z)w^{(VII)}w^{(VI)}w' + \\ + P_{53}(z)w^{(IV)}w + P_{64}(z)w'''w'' + P_{7,10}(z)w^{(V)} = 0, \end{gathered} \tag{18}$$

которое получается из уравнения (15) путём отбрасывания членов с номерами $i = \overline{0,2}$.

У членов уравнения (18) размерности

$$\varkappa_0^2 = \varkappa_1^2 = 3, \ \ \varkappa_2^2 = \varkappa_3^2 = 2 \ \ \varkappa_4^2 = 1,$$

По утверждению г) теоремы 2, из того, что для уравнения (18)

$$\varkappa_\tau^2 > d_2^2 > \varkappa_\eta^2, \ \tau = \overline{0,1}\,, \ \eta = 4, \ \ \mathfrak{n}_2^2 = \mathfrak{n}_3^2 = -1, \ \ \mathfrak{l}^2 = 7, \ \ \mathfrak{a}_2^2 = 9, \ \mathfrak{b}_2^2 = 6,$$

получаем: степени $m = 7$ и $m = 8$ полиномов-решений уравнения (15) являются корнями уравнения

$$\beta_{64}m^2 + (\beta_{53} - \beta_{64})m - 3\beta_{53} = 0. \tag{19}$$

При $m \in \{5, 6\}$ рассмотрим укороченное уравнение

$$P_{53}(z)w^{(IV)}w + P_{64}(z)w'''w'' + P_{7,10}(z)w^{(V)} = 0, \tag{20}$$

которое получается из уравнения (15) путём отбрасывания членов с номерами $i = \overline{0,4}$.

У членов уравнения (20) размерности

$$\varkappa_0^3 = \varkappa_1^3 = 2, \ \ \varkappa_2^3 = 1.$$

Поскольку для уравнения (20)

$$\varkappa_\tau^3 > d_2^3, \ \tau = \overline{0,1}\,, \ \mathfrak{l}^3 = 5, \ \mathfrak{a}_2^3 = 6,$$

то на основании утверждения в) теоремы 1 получаем, что уравнение (15) не имеет полиномиальных решений пятой степени.

При $m = 4$ рассмотрим укороченное уравнение

$$P_{53}(z)w^{(IV)}w + P_{64}(z)w'''w'' = 0, \tag{21}$$

которое получается из уравнения (15) путём отбрасывания членов с номерами $i = \overline{0,4}$ и $i = 7$. У членов уравнения (21)

$$\varkappa_0^4 = \varkappa_1^4 = d_0^4 = 2, \quad \mathfrak{n}_0^4 = \mathfrak{n}_1^4 = -1.$$

Согласно утверждению а) теоремы 2 степень $m = 4$ полиномиального решения уравнения (15) является корнем уравнения (19).

При $m = 3$ рассмотрим укороченное уравнение

$$w'''w'' = 0,$$

у которого нет полиномиальных решений третьей степени.

Стало быть, число $m = 3$ не может быть степенью полинома-решения уравнения (15).

Поскольку

$$\mathfrak{l}_0 = 18, \mathfrak{l}_1 = \mathfrak{l}_2 = 10, \mathfrak{l}_3 = \mathfrak{l}_4 = 7, \mathfrak{l}_5 = 4, \mathfrak{l}_6 = 3, \mathfrak{l}_7 = 5,$$

то $\ell = 3$.

Следовательно, полиномы степеней $m = 0, m = 1$ и $m = 2$ являются тривиальными полиномиальными решениями уравнения (15).

Итак, степени полиномиальных решений уравнения (15) принадлежат множеству

$$\{0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 6, \ldots, 20\}.$$

При этом полиномы нулевой, первой и второй степеней — тривиальные полиномиальные решения; степени $m \in \{4,\ 7,\ 8\}$ являются корнями уравнения (19), а степени $m \in \{10,\ 11, \ldots, 19\}$ — уравнения (16).

Пример 3. *Найдём множество целых неотрицательных чисел, которому принадлежат степени полиномиальных решений линейного дифференциального уравнения*

$$\sum_{i=0}^{n} B_{\mu_i}(z)w^{(l_i)} = 0,\ n \geqslant 1, \tag{22}$$

где $0 \leqslant l_0 < l_1 < \ldots < l_n$, B_{μ_i} $(i = \overline{0,n})$ *— полиномы с лексикографическим расположением членов* (2.1.1) *такие, что*

$$b_i - b_j = l_i - l_j,\ \ i, j = \overline{0,n},\ i \neq j. \tag{23}$$

У членов уравнения (22) размерности

$$\varkappa_0 = \varkappa_1 = \ldots = \varkappa_n = 1.$$

По утверждению а) теоремы 2 из того, что

$$\varkappa_i = d_0,\ i = \overline{0, n}\,, \quad \mathfrak{n}_0 = \ldots = \mathfrak{n}_n\,,$$

получаем: степени $m \geqslant \mathfrak{l} = l_n$ полиномиальных решений уравнения (22) при (23) являются корнями уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} l_i!\,\beta_i \binom{m}{l_i} = 0.$$

Рассуждая аналогичным образом с укороченными уравнениями при $m < \mathfrak{l} = l_n$, приходим к окончательному утверждению.

Степени полиномиальных решений уравнения (22) при (23) являются корнями уравнений

$$\sum_{i=0}^{\delta} l_i!\,\beta_i \binom{m}{l_i} = 0,$$

где

$$\delta = \left[\begin{array}{l} n, \ \text{ если } \ m \geqslant l_n; \\ r, \ \text{ если } \ l_r \leqslant m < l_{r+1},\ r \in \{1, 2, \ldots, n-1\}. \end{array}\right.$$

При $l_0 \leqslant m < l_1$ рассмотрим укороченное уравнение

$$B_{\mu_0}(z) w^{(l_0)} = 0,$$

которое получается из уравнения (22) отбрасыванием всех членов, кроме нулевого.

На основании леммы 1.2.1 из того, что это укороченное уравнение имеет только один член, заключаем: уравнение (22) при (23) не имеет полиномиальных решений степени m такой, что $l_0 \leqslant m < l_1$.

Поскольку $\ell = l_0$, то все целые неотрицательные числа, меньшие l_0, являются степенями тривиальных полиномиальных решений уравнения (22) при (23).

Таким образом, нетривиальные степени полиномиальных решений уравнения (22) при (23) содержатся во множестве целых неотрицательных корней уравнений

$$\sum_{i=0}^{\delta} l_i!\,\beta_i \binom{m}{l_i} = 0,\ \ \delta = \overline{0,n}\,,$$

степенями тривиальных полиномиальных решений уравнения (22) при (23) являются целые неотрицательные числа, меньшие l_0.

Числа $l_0 \leqslant m < l_1$ не являются степенями полиномиальных решений уравнения (22) при (23).

В [154] аналогичный результат при $m \geqslant l_n$ получен другим методом.

Пример 4. *Найдём множество целых неотрицательных чисел, которому принадлежат степени полиномиальных решений уравнения Эйлера*

$$\beta_0 w + \beta_1 z w' + \ldots + \beta_{n-1} z^{n-1} w^{(n-1)} + \beta_n z^n w^{(n)} = 0, \qquad (24)$$

где β_i *— постоянные, причём* $\beta_0\beta_n \neq 0$[1].

Поскольку $\ell = 0$, то уравнение Эйлера не имеет тривиальных полиномиальных решений.

Пусть $1 \leqslant s \leqslant n$ и

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_{s-1} = 0,\ \ \beta_s \neq 0.$$

При $0 \leqslant m < s$ рассмотрим укороченное уравнение

$$\beta_0 w = 0,$$

которое получается из уравнения (24) отбрасыванием всех членов, кроме нулевого.

На основании леммы 1.2.1 из того, что это укороченное уравнение

[1] Ограничение $\beta_0\beta_n \neq 0$ можно ослабить, положив $\beta_n \neq 0$. При этом общность решаемой задачи не нарушится.

Действительно, если

$$\beta_0 = \beta_1 = \ldots = \beta_{k-1} = 0,\ \ \beta_k \neq 0,$$

где $0 < k < n$, то все целые неотрицательные числа, меньшие k, являются степенями тривиальных полиномиальных решений.

Выполнив замену $u = w^{(k)}$ и умножив обе части полученного уравненния на z^{-k}, дифференциальное уравнение (24) сведём к уравнению Эйлера порядка $n-k$ с отличным от нуля коэффициентом при нулевом члене.

имеет только один член, заключаем: у уравнения Эйлера (24) нет полиномиальных решений степени m такой, что $0 \leqslant m < s$.

Уравнение (24) имеет характеристики:

$$\varkappa_0 = \varkappa_s = \varkappa_{s+1} = \ldots = \varkappa_n = 1, \ \mathfrak{m}_0 = b_0 = \mathfrak{l}_0 = 0, \ \mathfrak{m}_s = b_s = \mathfrak{l}_s = s,$$

$$\mathfrak{m}_i = b_i = \mathfrak{l}_i = i, \ i = \overline{s+1, n}\,, \ \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_s = \mathfrak{n}_{s+1} = \ldots = \mathfrak{n}_n = 0.$$

По утверждению а) теоремы 2 из того, что

$$\varkappa_0 = \varkappa_s = \varkappa_{s+1} = \ldots = \varkappa_n = d_0, \quad \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_s = \mathfrak{n}_{s+1} = \ldots = \mathfrak{n}_n,$$

получаем: степени $m \geqslant \mathfrak{l} = n$ полиномиальных решений уравнения (24) являются корнями уравнения

$$\sum_{i=0}^{n} i!\,\beta_i \binom{m}{i} = 0.$$

Рассуждая аналогичным образом с укороченными уравнениями при $s \leqslant m < \mathfrak{l} = n$, приходим к окончательному утверждению.

Степени полиномиальных решений уравнения (24) являются корнями уравнений

$$\sum_{i=0}^{\delta} i!\,\beta_i \binom{m}{i} = 0,$$

где

$$\delta = \left[\begin{array}{l} n, \ \text{если} \ m \geqslant n; \\ r, \ \text{если} \ m = r, \ r \in \{s, s+1, \ldots, n-1\}. \end{array}\right.$$

Таким образом, уравнение Эйлера (24) не имеет тривиальных полиномиальных решений, а степени нетривиальных полиномиальных решений принадлежат множеству корней уравнений

$$\sum_{i=0}^{\delta} i!\,\beta_i \binom{m}{i} = 0, \ \delta = \overline{s, n}\,.$$

§ 3. Коэффициент высшего члена полиномиального решения

В данном параграфе рассмотрим задачу о нахождении коэффициентов α_m высшего члена полиномиальных решений (1.2.1) степени m дифференциального уравнения (1.1.1).

Пусть члены уравнения (1.1.1) занумерованы в зависимости от размерностей так, что

$$\begin{gathered}\varkappa_\tau > \varkappa_p = \varkappa_{p+1} = \ldots = \varkappa_{p+s} = d_p > \varkappa_\eta,\\ \tau = \overline{0, p-1}\,,\ 0 \leqslant p \leqslant N,\ 0 \leqslant s \leqslant N-p,\ \eta = \overline{p+s+1, N}\,,\end{gathered} \tag{1}$$

а нумерация выделенных членов уточняется на основании относительных весов следующим образом:

$$\mathfrak{n}_p = \mathfrak{n}_{p+1} = \ldots = \mathfrak{n}_{p+\lambda} > \mathfrak{n}_{p+j},\ 0 \leqslant \lambda \leqslant s,\ j = \overline{\lambda+1, s}\,. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть имеют место соотношения* (1) *и* (2). *Тогда справедливы утверждения:*

а) *при*

$$\begin{gathered}p = 0,\ 0 \leqslant s < N,\\ {}^0m^{s+1} = {}^0m^{s+2} = \ldots = {}^0m^r = \mathfrak{b}_0,\ \ s+1 \leqslant r \leqslant N,\end{gathered} \tag{3}$$

коэффициент α_m *высшего члена полиномиального решения* (1.2.1) *степени* $m = \mathfrak{b}_0 \geqslant \mathfrak{l}$ *дифференциального уравнения* (1.1.1) *является корнем уравнения*

$$\alpha_m^{d_0} \sum_{h=0}^{\lambda} \widetilde{K}_h(m) + \sum_{\eta=s+1}^{r} K_\eta(m, \alpha_m) = 0; \tag{4}$$

б) *при*

$$\begin{gathered}0 < p \leqslant N,\ s = N-p,\\ {}^0m^p = {}^1m^p = \ldots = {}^lm^p = \mathfrak{a}_p,\ 0 \leqslant l \leqslant p-1,\end{gathered} \tag{5}$$

коэффициент α_m *высшего члена полинома-решения* (1.2.1) *степени* $m = \mathfrak{a}_p \geqslant \mathfrak{l}$ *дифференциального уравнения* (1.1.1) *является корнем уравнения*

$$\sum_{\tau=0}^{l} K_\tau(m, \alpha_m) + \alpha_m^{d_p} \sum_{h=0}^{\lambda} \widetilde{K}_{p+h}(m) = 0; \qquad (6)$$

в) *при*

$$0 < p < N,\ 0 \leqslant s < N - p,$$
$${}^0m^p = {}^1m^p = \ldots = {}^lm^p = \mathfrak{a}_p,\ 0 \leqslant l \leqslant p - 1, \qquad (7)$$

коэффициент α_m *высшего члена полиномиального решения* (1.2.1) *степени* $m = \mathfrak{a}_p \geqslant \mathfrak{l}, m > \mathfrak{b}_p$ *дифференциального уравнения* (1.1.1) *является корнем уравнения* (6);

г) *при*

$$0 < p < N,\ 0 \leqslant s < N - p,$$
$${}^pm^{p+s+1} = {}^pm^{p+s+2} = \ldots = {}^pm^r = \mathfrak{b}_p,\ p + s + 1 \leqslant r \leqslant N, \qquad (8)$$

коэффициент α_m *высшего члена полиномиального решения* (1.2.1) *степени* $m = \mathfrak{b}_p \geqslant \mathfrak{l}$, $m < \mathfrak{a}_p$ *дифференциального уравнения* (1.1.1) *является корнем уравнения*

$$\alpha_m^{d_p} \sum_{h=0}^{\lambda} \widetilde{K}_{p+h}(m) + \sum_{\eta=p+s+1}^{r} K_\eta(m, \alpha_m) = 0; \qquad (9)$$

д) *при*

$$0 < p < N,\ 0 \leqslant s < N - p,\ {}^0m^p = {}^1m^p = \ldots = {}^lm^p = \mathfrak{a}_p,$$
$${}^pm^{p+s+1} = {}^pm^{p+s+2} = \ldots = {}^pm^r = \mathfrak{b}_p, \qquad (10)$$
$$\mathfrak{a}_p = \mathfrak{b}_p,\ 0 \leqslant l \leqslant p - 1,\ p + s + 1 \leqslant r \leqslant N,$$

коэффициент α_m *высшего члена полиномиального решения* (1.2.1) *степени* $m = \mathfrak{b}_p = \mathfrak{a}_p \geqslant \mathfrak{l}$ *дифференциального уравнения* (1.1.1) *является корнем уравнения*

$$\sum_{\tau=0}^{l} K_\tau(m, \alpha_m) + \alpha_m^{d_p} \sum_{h=0}^{\lambda} \widetilde{K}_{p+h}(m) + \sum_{\eta=p+s+1}^{r} K_\eta(m, \alpha_m) = 0. \quad (11)$$

Доказательство. Пусть полином (1.2.1) степени $m \geqslant \mathfrak{l}$ является решением уравнения (1.1.1).

Подставляя $w = w(z)$ в уравнение (1.1.1), с учётом (1.1.2) получим тождество, которое после деления на (4.2.2) приводим к виду (12.2.2).

Если $\lambda \geqslant 1$, то имеет место соотношение (13.2.2).

Если $\lambda < s$, то имеет место соотношение (14.2.2).

Если для всех $\tau = \overline{0, l}$, $0 \leqslant l \leqslant p-1$, справедливы соотношения $\varkappa_\tau m + \mathfrak{n}_\tau = d_p m + \mathfrak{n}_p$, т.е. ${}^0m^p = {}^1m^p = \ldots = {}^lm^p$, то

$$\frac{B_{\mu_\tau}}{B_{\mu_p}} \cdot \frac{z^{\mathfrak{m}_p - \mathfrak{m}_\tau}}{w^{d_p - \varkappa_\tau}(z)} \to \frac{\beta_\tau}{\beta_p} \alpha_m^{\varkappa_\tau - d_p} \ \text{при } z \to \infty, \ \tau = \overline{0, l}\,. \quad (12)$$

Если для всех $\tau = \overline{l+1, p-1}$, $-1 \leqslant l \leqslant p-2$, справедливы неравенства $\varkappa_\tau m + \mathfrak{n}_\tau < d_p m + \mathfrak{n}_p$, то

$$\frac{B_{\mu_\tau}}{B_{\mu_p}} \cdot \frac{z^{\mathfrak{m}_p - \mathfrak{m}_\tau}}{w^{d_p - \varkappa_\tau}(z)} \to 0 \ \text{при } z \to \infty, \ \tau = \overline{l+1, p-1}\,. \quad (13)$$

Если для всех $\eta = \overline{p+s+1, r}$, $p+s+1 \leqslant r \leqslant N$, справедливы соотношения $\varkappa_\eta m + \mathfrak{n}_\eta = d_p m + \mathfrak{n}_p$, т.е. ${}^pm^{p+s+1} = {}^pm^{p+s+2} = \ldots = {}^pm^r$, то

$$\frac{B_{\mu_\eta}}{B_{\mu_p}} \cdot \frac{z^{\mathfrak{m}_p - \mathfrak{m}_\eta}}{w^{d_p - \varkappa_\eta}(z)} \to \frac{\beta_\eta}{\beta_p} \alpha_m^{\varkappa_\eta - d_p} \ \text{при } z \to \infty, \ \eta = \overline{p+s+1, r}\,. \quad (14)$$

Если для всех $\eta = \overline{r+1, N}$, $p+s+1 \leqslant r \leqslant N-1$, справедливы неравенства $\varkappa_\eta m + \mathfrak{n}_\eta < d_p m + \mathfrak{n}_p$, то

$$\frac{B_{\mu_\eta}}{B_{\mu_p}} \cdot \frac{z^{\mathfrak{m}_p - \mathfrak{m}_\eta}}{w^{d_p - \varkappa_\eta}(z)} \to 0 \ \text{при} \ z \to \infty, \ \eta = \overline{r+1, N}\,. \tag{15}$$

Пусть при условии (3) степень m полинома-решения (1.1.2) уравнения (1.1.1) такова, что $m = \mathfrak{b}_0 \geqslant \mathfrak{l}$.

Тогда из тождества (12.2.2) в результате перехода к пределу при $z \to \infty$, когда $r = N$ (когда $p+s+1 \leqslant r < N$), в случае $s = 0$ на основании (14) (на основании (14) и (15)), в случае $s > 0, \lambda = 0$ на основании (14.2.2) и (14) (на основании (14.2.2), (14) и (15)), в случае $s > 0$, $\lambda = s$ на основании (13.2.2) и (14) (на основании (13.2.2), (14) и (15)), в случае $1 \leqslant \lambda < s$ на основании (13.2.2), (14.2.2) и (14) (на основании (13.2.2), (14.2.2), (14) и (15)), получаем уравнение (4). Это доказывает утверждение а).

Аналогичным образом, используя предельный переход при $z \to \infty$ в тождестве (12.2.2), на основании (13.2.2), (14.2.2), а также (12) − (15) в каждом из случаев б) — д) доказываем сформулированные в теореме 1 утверждения. ■

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered} P_{0,13}(z) w^{(V)} (w'')^3 + P_{1,2}(z) w^{(IV)} w''' w' w + \\ + P_{2,10}(z) w''' (w')^2 + P_{3,18}(z) w^{(VI)} w + \\ + P_{4,22} (w^{(V)})^2 + P_{5,14}(z) w^{(IV)} w' + P_{6,25}(z) w^{(VI)} = 0, \end{gathered} \tag{16}$$

где P_{ij} — полиномы с лексикографическим расположением членов

$$P_{ij}(z) = \beta_{ij} z^j + \ldots, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ \beta_{ij} \neq 0, \ i = \overline{0,6}\,.$$

Члены уравнения (16) имеют характеристики:

$$b_0 = 13, \ \varkappa_0 = 4, \ \mathfrak{m}_0 = 11, \ \mathfrak{n}_0 = 2, \ \mathfrak{l}_0 = 5;$$

$$b_1 = 2, \ \varkappa_1 = 4, \ \mathfrak{m}_1 = 8, \ \mathfrak{n}_1 = -6, \ \mathfrak{l}_1 = 4;$$

$$b_2 = 10,\ \varkappa_2 = 3,\ \mathfrak{m}_2 = 5,\ \mathfrak{n}_2 = 5,\ \mathfrak{l}_2 = 3;$$

$$b_3 = 18,\ \varkappa_3 = 2,\ \mathfrak{m}_3 = 6,\ \mathfrak{n}_3 = 12,\ \mathfrak{l}_3 = 6;$$

$$b_4 = 22,\ \varkappa_4 = 2,\ \mathfrak{m}_4 = 10,\ \mathfrak{n}_4 = 12,\ \mathfrak{l}_4 = 5;$$

$$b_5 = 14,\ \varkappa_5 = 2,\ \mathfrak{m}_5 = 5,\ \mathfrak{n}_5 = 9,\ \mathfrak{l}_5 = 4;$$

$$b_6 = 25,\ \varkappa_6 = 1,\ \mathfrak{m}_6 = 6,\ \mathfrak{n}_6 = 19,\ \mathfrak{l}_6 = 6.$$

Функции степени

$$S_0(m) = 4m + 2,\ S_1(m) = 4m - 6,\ S_2(m) = 3m + 5,$$

$$S_3(m) = S_4(m) = 2m + 12,\ S_5(m) = 2m + 9,\ S_6(m) = m + 19;$$

с множествами определения

$$D(S_0) = D(S_4) = \mathbb{N}\backslash\{1, 2, 3, 4\},\ D(S_1) = D(S_5) = \mathbb{N}\backslash\{1, 2, 3\},$$

$$D(S_2) = \mathbb{N}\backslash\{1, 2\},\ D(S_3) = D(S_6) = \mathbb{N}\backslash\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Так как у уравнения (16) порядки членов таковы, что

$$\ell = \min_{i=\overline{0,6}}\{\mathfrak{l}_i\} = \min\{5, 4, 3, 6\} = 3,$$

то оно имеет тривиальные полиномиальные решения нулевой, первой и второй степеней.

Полиномиальные решения с неособыми степенями $m = 5$ и $m = 4$ доставляются соответственно членами с номерами 0, 4 и 2, 5, так как

$${}^0m^4 = 5 = \max\{\mathfrak{l}_0,\ \mathfrak{l}_4\} = \max\{5\},$$

$$S_0(5) = S_4(5) = 22 > S_2(5) = 20 > S_5(5) = 19 > S_1(5) = 14,$$

и

$${}^2m^5 = 4 = \max\{\mathfrak{l}_2,\ \mathfrak{l}_5\} = \max\{3,\ 4\},$$

$$S_2(4) = S_5(4) = 17 > S_1(4) = 10,$$

а члены с номерами 0, 3, 4, 6 обращаются в тождественный нуль.

Другие члены уравнения (16) неособые степени не определяют.

Действительно, числа

$$^{0}m^{5} = 3\frac{1}{2}\,,\ \ ^{0}m^{6} = 5\frac{2}{3}\,,\ \ ^{1}m^{5} = 7\frac{1}{2}\,,\ \ ^{1}m^{6} = 8\frac{1}{3}$$

не являются целыми; то, что

$$^{0}m^{2} = 3 < \max\{\mathfrak{l}_0,\ \mathfrak{l}_2\} = \max\{5,\ 3\} = 5,$$

$$^{0}m^{3} = 5 < \max\{\mathfrak{l}_0,\ \mathfrak{l}_3\} = \max\{5,\ 6\} = 6,$$

противоречит теореме 1.2.1; а то, что

$$^{1}m^{2} = 11 > \max\{\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2\} = \max\{4, 3\} = 4, \text{ но } S_0(11) = 46 > S_1(11) = 38,$$

$$^{1}m^{3} = 9 > \max\{\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_3\} = \max\{4,\ 6\} = 6, \text{ но } S_0(9) = 38 > S_1(9) = 30,$$

$$^{1}m^{4} = 9 > \max\{\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_4\} = \max\{4,\ 5\} = 5, \text{ но } S_0(9) = 38 > S_1(9) = 30,$$

$$^{2}m^{3} = 7 > \max\{\mathfrak{l}_2,\ \mathfrak{l}_3\} = \max\{3,\ 6,\} = 6, \text{ но } S_0(7) = 30 > S_2(7) = 26,$$

$$^{2}m^{4} = 7 > \max\{\mathfrak{l}_2,\ \mathfrak{l}_4\} = \max\{3,\ 5\} = 5, \text{ но } S_0(7) = 30 > S_2(7) = 26,$$

$$^{2}m^{6} = 7 > \max\{\mathfrak{l}_2,\ \mathfrak{l}_6\} = \max\{3,\ 6\} = 6, \text{ но } S_0(7) = 30 > S_2(7) = 26,$$

$$^{3}m^{6} = 7 > \max\{\mathfrak{l}_3,\ \mathfrak{l}_6\} = \max\{6\} = 6, \text{ но } S_0(7) = 30 > S_3(7) = 26,$$

$$^{4}m^{6} = 7 > \max\{\mathfrak{l}_4,\ \mathfrak{l}_6\} = \max\{5,\ 6\} = 6, \text{ но } S_0(7) = 30 > S_4(7) = 26,$$

$$^{5}m^{6} = 10 > \max\{\mathfrak{l}_5,\ \mathfrak{l}_6\} = \max\{4,\ 6\} = 6, \text{ но } S_0(10) = 42 > S_5(10) = 29,$$

противоречит лемме 1.2.1.

В уравнении (16) имеются два блока с равными размерностями:

$$\varkappa_0 = \varkappa_1 = 4 \quad \text{и} \quad \varkappa_3 = \varkappa_4 = \varkappa_5 = 2.$$

Первый блок особых степеней не доставляет, так как не выполняется условие (5.3.1):

$$\mathfrak{n}_0 = 2 > \mathfrak{n}_1 = -6.$$

Поскольку $\mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_4 = 12 > \mathfrak{n}_5 = 9,$ то согласно теореме 2.3.1 особые степени могут доставляться членами с номерами 3 и 4.

Если теперь учесть, что $\mathfrak{l}_3 = 6,\ \mathfrak{l}_4 = 5,$ то можно говорить лишь об особых степенях $m \geqslant 6.$

При $m \geqslant 6$ значения

$$S_0(m) = 4m + 2 > S_3(m) = S_4(m) = 2m + 12,$$

и нарушается условие (6.3.1) теоремы 3.3.1.

Поэтому и второй блок не определет особых степеней.

При $m = 4$ члены с номерами 0, 3, 4 и 6 обращаются в тождественный нуль, а

$$\varkappa_\tau > \varkappa_5 = d_5 = 2, \tau = 1,\ \tau = 2, \varkappa_1 = 4,\ \varkappa_2 = 3,$$

$$\mathfrak{a}_5 = 4,\ \max\{\mathfrak{l}_1,\ \mathfrak{l}_2,\ \mathfrak{l}_3\} = 4.$$

В силу утверждения б) теоремы 1 у высшего члена полиномиального решения коэффициент

$$\alpha_4 = -\frac{\beta_{5,14}}{4\beta_{2,10}}\,.$$

При $m = 5$ члены уравнения (16) с номерами 3 и 6 обращаются в тождественный нуль, а

$$\varkappa_0 = \varkappa_1 = d_0 = 4 > \varkappa_\eta,\ \eta = 2,\ \eta = 4,\ \eta = 5,$$

$$\varkappa_2 = 3,\ \varkappa_4 = 2,\ \varkappa_5 = 2,\ \mathfrak{b}_0 = 5,\ \max\{\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_4, \mathfrak{l}_5\} = 5.$$

В силу утверждения а) теоремы 1 коэффициент α_5 высшего члена полиномиального решения является корнем уравнения

$$200\beta_{0,13}\alpha_5^2 + 3\beta_{4,22} = 0.$$

§ 4. Полиномиальные решения уравнений P-типа

В качестве приложения результатов трёх предыдущих параграфов рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения P-типа, то есть, уравнения, решения которых не имеют подвижных критических особых точек [2].

В этом классе уравнений выделим шесть неприводимых уравнений Пенлеве [2, с.426–478] и специальные уравнения третьего порядка [104;107; 108; 109].

Члены первого неприводимого уравнения Пенлеве

$$w'' - 6w^2 - z = 0 \qquad (1)$$

имеют характеристики:

$$b_0 = 0,\ \varkappa_0 = 1,\ \mathfrak{m}_0 = 2,\ \mathfrak{n}_0 = -2,\ \mathfrak{l}_0 = 2;$$

$$b_1 = 0,\ \varkappa_1 = 2,\ \mathfrak{m}_1 = 0,\ \mathfrak{n}_1 = 0,\ \mathfrak{l}_1 = 0;$$

$$b_2 = 1,\ \varkappa_2 = 0,\ \mathfrak{m}_2 = 0,\ \mathfrak{n}_2 = 1,\ \mathfrak{l}_2 = 0.$$

Поскольку первое неприводимое уравнение Пенлеве содержит только один доминирующий член с номером 1, то, по следствию 1.2.2, степени $m \geqslant \mathfrak{l} = 2$ его полиномиальных решений удовлетворяют неравенству

$$m \leqslant \max\{{}^0m^1,\ {}^1m^2\} = \max\Big\{-2, \frac{1}{2}\Big\} = \frac{1}{2}\,.$$

В силу полученного противоречия $\Big(m \geqslant 2,\ m \leqslant \dfrac{1}{2}\Big)$ уравнение (1) полиномиальных решений степени $m \geqslant 2$ не имеет.

При $m < 2$ рассмотрим укороченное уравнение

$$6w^2 + z = 0,$$

которое, как очевидно, полиномиальных решений не имеет.

Таким образом, доказана (см. [57, с.43; 12-14])

Теорема 1. *Первое неприводимое уравнение Пенлеве* (1) *полиномиальных решений не имеет.*

Уравнение

$$w'' - 2w^3 - zw - \alpha = 0, \tag{2}$$

где α — некоторая постоянная, называется вторым неприводимым уравнением Пенлеве.

Теорема 2. *Второе неприводимое уравнение Пенлеве* (2) *имеет только одно полиномиальное решение*

$$w\colon z \to 0, \ \forall z \in \mathbb{C}, \quad \textit{при} \quad \alpha = 0.$$

Доказательство. Члены дифференциального уравнения (2) имеют характеристики:

$$b_0 = 0, \ \varkappa_0 = 1, \ \mathfrak{m}_0 = 2, \ \mathfrak{n}_0 = \, -2, \ \mathfrak{l}_0 = 2;$$

$$b_1 = 0, \ \varkappa_1 = 3, \ \mathfrak{m}_1 = 0, \ \mathfrak{n}_1 = 0, \ \mathfrak{l}_1 = 0;$$

$$b_2 = 1, \ \varkappa_2 = 1, \ \mathfrak{m}_2 = 0, \ \mathfrak{n}_2 = 1, \ \mathfrak{l}_2 = 0;$$

$$b_3 = 0, \ \varkappa_3 = 0, \ \mathfrak{m}_3 = 0, \ \mathfrak{n}_3 = 0, \ \mathfrak{l}_3 = 0.$$

Поскольку второе неприводимое уравнение Пенлеве содержит только один доминирующий член с номером 1, то, по следствию 1.2.2, степени $m \geqslant \mathfrak{l} = 2$ его полиномиальных решений удовлетворяют неравенству

$$m \leqslant \max\bigl\{{}^0m^1, \, {}^1m^2 \, , {}^1m^3\bigr\} = \max\Bigl\{-1, \, \frac{1}{2}, \, 0\Bigr\} = \frac{1}{2} \, .$$

В силу полученного противоречия $\Bigl(m \geqslant 2, \, m \leqslant \dfrac{1}{2}\Bigr)$ уравнение (2) полиномиальных решений степени $m \geqslant 2$ не имеет.

При $m < 2$ рассмотрим укороченное уравнение

$$2w^3 + zw + \alpha = 0.$$

При $\alpha \neq 0$ это уравнение не имеет полиномиальных решений первой и нулевой степени, в чём убеждаемся непосредственно подстановкой.

Если $\alpha = 0$, то $w = 0$ — полиномиальное решение. ■

Впервые вопрос об однозначных алгебраических решениях уравнения (2) был рассмотрен подробно А.И. Яблонским [149], позднее А.П. Воробьёвым [11].

Теорема 3. *Третье неприводимое уравнение Пенлеве*

$$zww'' - z(w')^2 + ww' - \gamma z w^4 - \alpha w^3 - \beta w - \delta z = 0, \qquad (3)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — *некоторые постоянные, имеет полиномиальные решения:*

а) $w\colon z \to 0, \forall z \in \mathbb{C}$, *при* $\delta = 0$;

б) $w\colon z \to C, \forall z \in \mathbb{C}$, *и* $w\colon z \to Cz, \forall z \in \mathbb{C}$, *где* C — *произвольная постоянная, при* $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$;

в) $w\colon z \to \pm\sqrt{-\dfrac{\beta}{\alpha}}, \forall z \in \mathbb{C}$, *при* $\alpha\gamma\delta \neq 0, \gamma\beta^2 + \delta\alpha^2 = 0$ *и при* $\gamma = \delta = 0, \ \alpha\beta \neq 0$;

г) $w\colon z \to \mathbb{C}_i, \forall z \in \mathbb{C}$, *где числа* C_i — *корни уравнения* $\gamma C^4 + \delta = 0$, *при* $\alpha = \beta = 0, \gamma\delta \neq 0$;

д) $w\colon z \to -\dfrac{\delta}{\beta}\, z, \forall z \in \mathbb{C}$, *при* $\alpha = \gamma = 0, \beta\delta \neq 0, \delta + \beta^2 \neq 0$;

е) $w\colon z \to \beta z + C, \forall z \in \mathbb{C}$, *где число* C — *произвольная постоянная, при* $\alpha = \gamma = 0, \beta\delta \neq 0, \delta + \beta^2 = 0$;

ж) *степени* $m \geqslant 2$ *при* $\alpha = \gamma = 0$.

Доказательство. Если $\delta = 0$, то $w\colon z \to 0, \forall z \in \mathbb{C}$, является решением уравнения (3), а при $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ решением будет $w\colon z \to C, \forall z \in \mathbb{C}$, где C — произвольная постоянная.

Это — тривиальные полиномиальные решения третьего неприводимого уравнения Пенлеве. Найдём нетривиальные полиномиальные решения.

Уравнения (3) имеет характеристики:

$$\beta_0 = 1, \ b_0 = 1, \ \varkappa_0 = 2, \ \mathfrak{m}_0 = 2, \ \mathfrak{n}_0 = -1, \ \mathfrak{l}_0 = 2;$$

$$\beta_1 = -1,\ b_1 = 1,\ \varkappa_1 = 2,\ \mathfrak{m}_1 = 2,\ \mathfrak{n}_1 = -1,\ \mathfrak{l}_1 = 1;$$

$$\beta_2 = 1,\ b_2 = 0,\ \varkappa_2 = 2,\ \mathfrak{m}_2 = 1,\ \mathfrak{n}_2 = -1,\ \mathfrak{l}_2 = 1;$$

$$\beta_3 = -\gamma,\ b_3 = 1,\ \varkappa_3 = 4,\ \mathfrak{m}_3 = 0,\ \mathfrak{n}_3 = 1,\ \mathfrak{l}_3 = 0;$$

$$\beta_4 = -\alpha,\ b_4 = 0,\ \varkappa_4 = 3,\ \mathfrak{m}_4 = 0,\ \mathfrak{n}_4 = 0,\ \mathfrak{l}_4 = 0;$$

$$\beta_5 = -\beta,\ b_5 = 0,\ \varkappa_5 = 1,\ \mathfrak{m}_5 = 0,\ \mathfrak{n}_5 = 0,\ \mathfrak{l}_5 = 0;$$

$$\beta_6 = -\delta,\ b_6 = 1,\ \varkappa_6 = 0,\ \mathfrak{m}_6 = 0,\ \mathfrak{n}_6 = 1,\ \mathfrak{l}_6 = 0.$$

Поскольку при $\gamma \neq 0$ размерности

$$\varkappa_3 = 4 > \varkappa_4 = 3 > \varkappa_0 = \varkappa_1 = \varkappa_2 = 2 > \varkappa_5 = 1 > \varkappa_6 = 0,$$

то на основании следствия 1.2.2 устанавливаем, что если полином (1.2.1) степени $m \geqslant \mathfrak{l} = 2$ является решением уравнения (3), то

$$m \leqslant \max\{{}^i m^3 \colon i = \overline{0,6}\,,\ i \neq 3\} = \max\Big\{-1,\ -\frac{1}{3},\ 0\Big\} = 0.$$

При $\gamma = 0,\ \alpha \neq 0,$ по следствию 1.2.2, если полином степени $m \geqslant 2$ является решением уравнения (3), то

$$m \leqslant \max\{{}^i m^4 \colon i = \overline{0,6}\,,\ i \neq 3,\ i \neq 4\} = \max\Big\{-1,\ 0,\ \frac{1}{3}\Big\} = \frac{1}{3}\,.$$

Следовательно, при $\gamma \neq 0$ и при $\gamma = 0,\ \alpha \neq 0$ полиномиальных решений степени $m \geqslant 2$ у уравнения (3) нет.

Пусть

$$\alpha = \gamma = 0,\ |\beta| + |\delta| \neq 0\ (\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0).$$

Тогда согласно утверждению б) теоремы 2.2.2, если число $m \geqslant 2$ является степенью решения (1.2.1) уравнения (3), то оно будет корнем уравнения (11.2.2), которое в данном случае имеет вид

$$m(m-1) - m^2 + m = 0.$$

Любое $m \geqslant 2$ — корень этого уравнения.

Следует заметить, что при

$$\alpha=\gamma=0,\ |\beta|+|\delta|\neq 0$$

для обоснования возможности применения утверждения б) теоремы 2.2.2, число $m\geqslant 2$ должно удовлетворять условию

$$m>\max\{{}^{i}m^{0}\colon i=\overline{5,6}\,\}=1.$$

Стало быть, если уравнение Пенлеве (3) имеет полиномиальное решение (1.2.1) степени $m\geqslant 2$, то $\alpha=\gamma=0.$

При $m=1$ рассмотрим укороченное уравнение

$$z(w')^2-ww'+\gamma zw^4+\alpha w^3+\beta w+\delta z=0 \tag{4}$$

с характеристиками:

$$\beta_0=1,\ b_0=1,\ \varkappa_0=2,\ \mathfrak{m}_0=2,\ \mathfrak{n}_0=\,-1,\ \mathfrak{l}_0=1;$$

$$\beta_1=\,-1,\ b_1=0,\ \varkappa_1=2,\ \mathfrak{m}_1=1,\ \mathfrak{n}_1=\,-1,\ \mathfrak{l}_1=1;$$

$$\beta_2=\gamma,\ b_2=1,\ \varkappa_2=4,\ \mathfrak{m}_2=0,\ \mathfrak{n}_2=1,\ \mathfrak{l}_2=0;$$

$$\beta_3=\alpha,\ b_3=0,\ \varkappa_3=3,\ \mathfrak{m}_3=0,\ \mathfrak{n}_3=0,\ \mathfrak{l}_3=0;$$

$$\beta_4=\beta,\ b_4=0,\ \varkappa_4=1,\ \mathfrak{m}_4=0,\ \mathfrak{n}_4=0,\ \mathfrak{l}_4=0;$$

$$\beta_5=\delta,\ b_5=1,\ \varkappa_5=0,\ \mathfrak{m}_5=0,\ \mathfrak{n}_5=1,\ \mathfrak{l}_5=0.$$

Так как при $\gamma\neq 0$ размерности

$$\varkappa_2=4>\varkappa_3=3>\varkappa_0=\varkappa_1=2>\varkappa_4=1>\varkappa_5=0,$$

то согласно следствию 1.2.2, если полином (1.2.1) степени $m=1$ является решением уравнения (4), то

$$m\leqslant\max\{{}^{i}m^{2}\colon i=\overline{0,5}\,,\ i\neq 2\}=\max\Big\{-1,\ -\frac{1}{3},0\Big\}=0.$$

Если же $\gamma=0,\ \alpha\neq 0,$ то

$$\varkappa_3 = 3 > \varkappa_0 = \varkappa_1 = 2 > \varkappa_4 = 1 > \varkappa_5 = 0$$

и согласно следствию 1.2.2 из того, что полином (1.2.1) степени $m = 1$ является решением уравнения (4), получаем:

$$m \leqslant \max\{{}^i m^3 \colon i = \overline{0,5}\,,\ i \neq 2,\ i \neq 3\} = \max\Big\{ -1, 0, \frac{1}{3}\Big\} = \frac{1}{3}\,.$$

Итак, при $|\alpha| + |\gamma| \neq 0$ уравнение (4), а значит, и уравнение Пенлеве (3) не имеют полиномиальных решений первой степени.

Если $\alpha = \gamma = 0, |\beta| + |\delta| \neq 0,$ то согласно утверждению б) теоремы 2.2.2 уравнение (4) необходимо имеет полиномиальное решение (1.2.1) степени $m = 1.$

Непосредственно подстановкой полинома первой степени общего вида в уравнение (4) получаем, что:

1) при $\alpha = \gamma = 0, \beta\delta \neq 0, \delta + \beta^2 \neq 0$ уравнение (3) имеет полиномиальное решение $w\colon z \to -\dfrac{\delta}{\beta}\,z, \forall z \in \mathbb{C};$

2) при $\alpha = \gamma = 0, \beta\delta \neq 0, \delta + \beta^2 = 0$ уравнение (3) имеет однопараметрическое семейство полиномиальных решений $w\colon z \to \beta z + C, \forall z \in \mathbb{C},$ где C — произвольная постоянная.

Если $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0,$ то согласно утверждению а) теоремы 2.2.2 уравнение (4) необходимо имеет полиномиальное решение (1.2.1) степени $m = 1.$

Подстановкой полинома первой степени общего вида в уравнение (4) получаем, что при $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ уравнение (3) имеет решение $w\colon z \to Cz, \forall z \in \mathbb{C},$ где C — произвольная постоянная.

При $m = 0$ рассматривается укороченное уравнение

$$\gamma z w^4 + \alpha w^3 + \beta w + \delta z = 0,$$

из которого непосредственно подстановкой устанавливаем справедливость утверждений в) и г). ■

Укажем полиномиальные решения (1.2.1) степени $m \geqslant 2$ у третьего неприводимого уравнения Пенлеве (3) при $\alpha = \gamma = 0.$

Предварительно заметим, что в этом случае уравнение (3) интегрируется в квадратурах [97,с.35-40; 99] и имеет общий интеграл

$$z\colon t \to \exp t, \ \ w\colon t \to v \exp t,$$

где v такое, что

$$\int \frac{dv}{\sqrt{C_1 v^2 - 2\beta v - v}} = t + C_2,$$

C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

При $\alpha = \gamma = 0, \ \beta^2 + m^2\delta = 0$ уравнение Пенлеве (3) имеет однопараметрическое семейство решений

$$w\colon z \to Cz^{m+1} + \frac{\beta}{m^2}\, z, \ \forall z \in \mathbb{C},$$

где C — произвольная постоянная; а полином

$$w\colon z \to Cz^2 + \beta z + \frac{\beta^2 + \delta}{4C}\,, \ \forall z \in \mathbb{C},$$

где C — произвольная постоянная, отличная от нуля, являются решениями уравнения (3) при $\alpha = \gamma = 0.$

В [58; 94] также указаны случаи наличия полиномиальных решений у уравнения (3).

Теорема 4. *Полиномиальными решениями четвёртого неприводимого уравнения Пенлеве*

$$2ww'' - (w')^2 - 3w^4 - 8zw^3 - 4(z^2 - \alpha)w^2 - 2\beta = 0 \qquad (5)$$

являются[1]*:*

а) $w\colon z \to \ -2z, \forall z \in \mathbb{C},$ *при* $\alpha = 0, \ \beta = \ -2;$

[1] Заметим, что полиномиальные решения уравнения (5) указаны в [95], но не было доказано, что это все возможные полиномиальные решения четвёртого уравнения Пенлеве.

Такого рода ситуации имеют место для второго, третьего и рассматриваемых далее пятого и шестого неприводимых уравнений Пенлеве, когда приводятся примеры полиномиальных решений, но не решается вопрос о том, все ли решения-полиномы найдены.

б) $w\colon z \to -\dfrac{2}{3}\,z,\ \forall z \in \mathbb{C},$ *при* $\alpha = 0,\ \beta = -\dfrac{2}{9};$

в) $w\colon z \to 0,\ \forall z \in \mathbb{C},$ *при* $\beta = 0.$

Доказательство. Уравнение (5) имеет характеристики:

$$\beta_0 = 2,\ b_0 = 0,\ \varkappa_0 = 2,\ \mathfrak{m}_0 = 2,\ \mathfrak{n}_0 = -2,\ \mathfrak{l}_0 = 2;$$

$$\beta_1 = -1,\ b_1 = 0,\ \varkappa_1 = 2,\ \mathfrak{m}_1 = 2,\ \mathfrak{n}_1 = -2,\ \mathfrak{l}_1 = 1;$$

$$\beta_2 = -3,\ b_2 = 0,\ \varkappa_2 = 4,\ \mathfrak{m}_2 = 0,\ \mathfrak{n}_2 = 0,\ \mathfrak{l}_2 = 0;$$

$$\beta_3 = -8,\ b_3 = 1,\ \varkappa_3 = 3,\ \mathfrak{m}_3 = 0,\ \mathfrak{n}_3 = 1,\ \mathfrak{l}_3 = 0;$$

$$\beta_4 = -4,\ b_4 = 2,\ \varkappa_4 = 2,\ \mathfrak{m}_4 = 0,\ \mathfrak{n}_4 = 2,\ \mathfrak{l}_4 = 0;$$

$$\beta_5 = -2\beta,\ b_5 = 0,\ \varkappa_5 = 0,\ \mathfrak{m}_5 = 0,\ \mathfrak{n}_5 = 0,\ \mathfrak{l}_5 = 0.$$

Поскольку

$$\varkappa_2 = 4 > \varkappa_3 = 3 > \varkappa_0 = \varkappa_1 = \varkappa_4 = 2 > \varkappa_5 = 0,$$

то, по следствию 1.2.2, получаем, если число $m \geqslant \mathfrak{l} = 2$ является степенью полиномиального решения (1.2.1) уравнения (5), то

$$m \leqslant \max\bigl\{{}^i m^2\colon i = \overline{0,5}\,,\ i \ne 2\bigr\} = \max\{-1, 1, 0\} = 1.$$

Следовательно, уравнение (4) полиномиальных решений степени $m \geqslant 2$ не имеет.

Полиномиальные решения первой и нулевой степени находим подстановкой $w = \alpha_1 z + \alpha_0$ в уравнение (5). ■

Теорема 5. *Пятое непреводимое уравнение Пенлеве*

$$\begin{gathered} 2z^2w^2w'' - 2z^2ww'' - 3z^2w(w')^2 + z^2(w')^2 + 2zw^2w' - \\ - 2zww' - 2\alpha w^5 + 6\alpha w^4 - 2(\delta z^2 + \gamma z + 3\alpha + \beta)w^3 - \\ - 2(\delta z^2 - \gamma z - \alpha - 3\beta)w^2 - 6\beta w + 2\beta = 0, \end{gathered} \tag{6}$$

где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ *и* δ *— некоторые постоянные, имеет полиноми-*

альные решения:

а) $w\colon z \to 0, \forall z \in \mathbb{C},$ *при* $\beta = 0;$

б) $w\colon z \to C, \forall z \in \mathbb{C},$ *где* C *— произвольная постоянная, при* $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0;$

в) $w\colon z \to 1, \forall z \in \mathbb{C},$ *при* $\delta = 0,\ |\alpha| + |\beta| + |\gamma| \neq 0;$

г) $w\colon z \to -1, \forall z \in \mathbb{C},$ *при* $\gamma = 0,\ \alpha + \beta = 0,\ \delta \neq 0;$

д) $w\colon z \to -\dfrac{2\delta}{\gamma}\, z + 1, \forall z \in \mathbb{C},$ *при* $\alpha\gamma\delta \neq 0,\ \beta = -0{,}5,$ $4\alpha\delta + \gamma^2 = 0;$

е) $w\colon z \to az + b, \forall z \in \mathbb{C},$ *где* $a^2 + 2\delta = 0,\ b^2 + 2\beta = 0,$ *при* $\alpha = \dfrac{1}{2},\ \delta \neq 0,\ \ \gamma^4 + 64\delta^2 + 16\beta^2\delta^2 - 8\beta\delta\gamma^2 + 64\delta^2\beta + 16\gamma^2\delta = 0;$

ж) *степени* $m \geqslant 1$ *такой, что* $m^2 + 2\beta = 0,$ *при* $\beta \neq 0,$ $\alpha = \gamma = \delta = 0.$

Доказательство. Если $\beta = 0,$ то $w\colon z \to 0, \forall z \in \mathbb{C},$ является решением уравнения (6); а при $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$ решением будет $w\colon z \to C, \forall z \in \mathbb{C},$ где C — произвольная постоянная. Это — тривиальное и тривиальное полиномиальное решения.

Для нахождения нетривиальных полиномиальных решений определим характеристики членов уравнения (6):

$$\beta_0 = 2,\ b_0 = 2,\ \varkappa_0 = 3,\ \mathfrak{m}_0 = 2,\ \mathfrak{n}_0 = 0,\ \mathfrak{l}_0 = 2;$$

$$\beta_1 = -2,\ b_1 = 2,\ \varkappa_1 = 2,\ \mathfrak{m}_1 = 2,\ \mathfrak{n}_1 = 0,\ \mathfrak{l}_1 = 2;$$

$$\beta_2 = -3,\ b_2 = 2,\ \varkappa_2 = 3,\ \mathfrak{m}_2 = 2,\ \mathfrak{n}_2 = 0,\ \mathfrak{l}_2 = 1;$$

$$\beta_3 = 1,\ b_3 = 2,\ \varkappa_3 = 2,\ \mathfrak{m}_3 = 2,\ \mathfrak{n}_3 = 0,\ \mathfrak{l}_3 = 1;$$

$$\beta_4 = 2,\ b_4 = 1,\ \varkappa_4 = 3,\ \mathfrak{m}_4 = 1,\ \mathfrak{n}_4 = 0,\ \mathfrak{l}_4 = 1;$$

$$\beta_5 = -2,\ b_5 = 1,\ \varkappa_5 = 2,\ \mathfrak{m}_5 = 1,\ \mathfrak{n}_5 = 0,\ \mathfrak{l}_5 = 1;$$

$$\beta_6 = -2\alpha,\ b_6 = 0,\ \varkappa_6 = 5,\ \mathfrak{m}_6 = 0,\ \mathfrak{n}_6 = 0,\ \mathfrak{l}_6 = 0;$$

$$\beta_7 = 6\alpha,\ b_7 = 0,\ \varkappa_7 = 4,\ \mathfrak{m}_7 = 0,\ \mathfrak{n}_7 = 0,\ \mathfrak{l}_7 = 0;$$

$$\beta_8 = \left[\begin{array}{l} -2\delta \ \text{при} \ \delta \ne 0, \\ -2\gamma \ \text{при} \ \delta = 0, \ \gamma \ne 0, \\ -6\alpha - 2\beta \ \text{при} \ \delta = \gamma = 0, \end{array}\right. \qquad b_8 = \left[\begin{array}{l} 2 \ \text{при} \ \delta \ne 0, \\ 1 \ \text{при} \ \delta = 0, \ \gamma \ne 0, \\ 0 \ \text{при} \ \delta = \gamma = 0, \end{array}\right.$$

$$\varkappa_8 = 3, \ \mathfrak{m}_8 = 0, \ \mathfrak{n}_8 = b_8, \ \mathfrak{l}_8 = 0;$$

$$\beta_9 = \left[\begin{array}{l} -2\delta \ \text{при} \ \delta \ne 0, \\ 2\gamma \ \text{при} \ \delta = 0, \ \gamma \ne 0, \\ 2\alpha + 6\beta \ \text{при} \ \delta = \gamma = 0, \end{array}\right. \qquad b_9 = \left[\begin{array}{l} 2 \ \text{при} \ \delta \ne 0, \\ 1 \ \text{при} \ \delta = 0, \ \gamma \ne 0, \\ 0 \ \text{при} \ \delta = \gamma = 0, \end{array}\right.$$

$$\varkappa_9 = 2, \ \mathfrak{m}_9 = 0, \ \mathfrak{n}_9 = b_9, \ \mathfrak{l}_9 = 0;$$

$$\beta_{10} = -6\beta, \ b_{10} = 0, \ \varkappa_{10} = 1, \ \mathfrak{m}_{10} = 0, \ \mathfrak{n}_{10} = 0, \ \mathfrak{l}_{10} = 0;$$

$$\beta_{11} = 2\beta, \ b_{11} = 0, \ \varkappa_{11} = 0, \ \mathfrak{m}_{11} = 0, \ \mathfrak{n}_{11} = 0, \ \mathfrak{l}_{11} = 0.$$

Поскольку при $\alpha \ne 0$ размерности

$$\varkappa_6 = 5 > \varkappa_7 = 4 > \varkappa_0 = \varkappa_2 = \varkappa_4 = \varkappa_8 = 3,$$
$$3 > \varkappa_1 = \varkappa_3 = \varkappa_5 = \varkappa_9 = 2 > \varkappa_{10} = 1 > \varkappa_{11} = 0,$$

то на основании следствия 1.2.2, если число $m \geqslant \mathfrak{l} = 2$ является степенью полиномиального решения (1.2.1) дифференциального уравнения (6), то

$$m \leqslant \max\left\{{}^{i}m^{6} \colon i = \overline{0,11}\,, \ i \ne 6\right\} = \left[\begin{array}{l} 1 \ \text{при} \ \delta \ne 0, \\ \dfrac{1}{2} \ \text{при} \ \delta = 0, \ \gamma \ne 0, \\ 0 \ \text{при} \ \delta = \gamma = 0. \end{array}\right.$$

Поэтому при $\alpha \ne 0$ уравнение (6) полиномиальных решений степени $m \geqslant 2$ не имеет.

Пусть $\alpha = 0$. Тогда

$$\varkappa_0 = \varkappa_2 = \varkappa_4 = \varkappa_8 = 3,$$

$$3 > \varkappa_1 = \varkappa_3 = \varkappa_5 = \varkappa_9 = 2 > \varkappa_{10} = 1 > \varkappa_{11} = 0.$$

В соответствии со следствием 1.2.2, если число $m \geqslant \mathfrak{l} = 2$ является степенью полиномиального решения (1.2.1) уравнения (6), то при $|\delta| + |\gamma| \neq 0$ оно удовлетворяет неравенству

$$m \leqslant \max\bigl\{{}^i m^0 \colon i = \overline{1, 11}\,,\ i \notin \{2, 4, 6, 7, 8\}\bigr\} = 0.$$

Рассмотрим случай, когда $\delta = \gamma = 0$. Имеем:

$$\varkappa_0 = \varkappa_2 = \varkappa_4 = \varkappa_8 = 3 > \varkappa_1 = \varkappa_3 = \varkappa_5 = \varkappa_9 = 2,$$

$$2 > \varkappa_{10} = 1 > \varkappa_{11} = 0, \quad \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_4 = \mathfrak{n}_8 = 0.$$

На основании утверждения б) теоремы 2.2.2 получаем, что если число $m \geqslant \mathfrak{l} = 2$ такое, что

$$m > \max\bigl\{{}^i m^0 \colon i = \overline{1, 11}\,,\ i \notin \{2, 4, 6, 7, 8\}\bigr\} = 0,$$

является степенью полиномиального решения (1.2.1) уравнения (6), то оно будет корнем уравнения

$$m^2 + 2\beta = 0. \tag{7}$$

Таким образом, если число $m \geqslant 2$ является степенью полиномиального решения (1.2.1) дифференциального уравнения (6), то $\beta \neq 0,\ \alpha = \gamma = \delta = 0$ и оно — корень уравнения (7).

При $m = 1$ рассмотрим укороченное уравнение

$$\begin{gathered} 3z^2 w (w'')^2 - z^2 (w')^2 - 2zw^2 w' + 2zww' + 2\alpha w^5 - \\ - 6\alpha w^4 + 2(\delta z^2 + \gamma z + 3\alpha + \beta) w^3 + \\ + 2(\delta z^2 - \gamma z - \alpha - 3\beta) w^2 + 6\beta w - 2\beta = 0, \end{gathered} \tag{8}$$

которое получаем отбрасыванием нулевого и первого членов в (6).

При $\alpha \neq 0$ размерности

$$\varkappa_6 = 5 > \varkappa_7 = 4 > \varkappa_2 = \varkappa_4 = \varkappa_8 = 3,$$

$$3 > \varkappa_3 = \varkappa_5 = \varkappa_9 = 2 > \varkappa_{10} = 1 > \varkappa_{11} = 0.$$

Тогда, по следствию 1.2.2, если число $m = 1$ является степенью полиномиального решения (1.2.1) уравнения (8), то

$$m \leqslant \max\{{}^i m^6 \colon i = \overline{2, 11}\,,\ i \neq 6\} = \left[\begin{array}{l} 1, \ \text{если } \ \delta \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}\,, \ \text{если } \ \delta = 0, \ \gamma \neq 0, \\ 0, \ \text{если } \ \delta = \gamma = 0. \end{array}\right.$$

Это возможно лишь при $\delta \neq 0$.

Непосредственной подстановкой в уравнение (8) при $\alpha\delta \neq 0$ полинома первой степени, устанавливаем, что уравнение (6):

а) при

$$\alpha\gamma\delta \neq 0, \ \ \beta = -\frac{1}{2}, \ \ 4\alpha\delta + \gamma^2 = 0$$

имеет полиномиальное решение

$$w\colon z \to -\frac{2\delta}{\gamma}\, z + 1, \forall z \in \mathbb{C}$$

б) при

$$\alpha = \frac{1}{2}\,, \ \delta \neq 0, \ \gamma^4 + 64\delta^2 + 16\beta^2\delta^2 - 8\beta\delta\gamma^2 + 64\delta^2\beta + 16\gamma^2\delta = 0$$

имеет решение

$$w\colon z \to az + b, \forall z \in \mathbb{C},$$

где a и b постоянные такие, что

$$a^2 + 2\delta = 0, \ b^2 + 2\beta = 0.$$

Пусть $\alpha = 0$. Тогда

$$\varkappa_2 = \varkappa_4 = \varkappa_8 = 3 > \varkappa_3 = \varkappa_5 = \varkappa_9 = 2 > \varkappa_{10} = 1 > \varkappa_{11} = 0.$$

По следствию 1.2.2, если число $m = 1$ — степень полиномиального решения (1.2.1) уравнения (8), то при $|\delta| + |\gamma| \neq 0$ оно удовлетворяет неравенству

$$m \leqslant \max\bigl\{{}^{i}m^{2}\colon i = \overline{3, 11}\,,\ i \notin \{4, 6, 7, 8\}\bigr\} = 0.$$

Итак, при $\alpha = 0,\ |\delta| + |\gamma| \neq 0$ уравнение (6) полиномиальных решений первой степени не имеет.

Рассмотрим случай $\alpha = \gamma = \delta = 0.$

В силу утверждения б) теоремы 2.2.2, если уравнение (8) имеет полиномиальное решение (1.2.1) степени $m = 1,$ то

$$m > \max\bigl\{{}^{i}m^{2}\colon i = \overline{3, 11}\,,\ i \notin \{4, 6, 7, 8\}\bigr\} = 0$$

и $m = 1$ будет корнем уравнения (11.2.2), которое в данном случае имеет вид $3m^2 - 2m + 2\beta = 0,$ то есть, $\beta = -\dfrac{1}{2}\,.$

Непосредственно подстановкой полинома первой степени в уравнение (8) при $\alpha = \gamma = \delta = 0, \beta = -\dfrac{1}{2}$ получаем, что $w\colon z \to Cz + 1, \forall z \in \mathbb{C},$ где C — произвольная постоянная, является решением дифференциального уравнения (6).

При $m = 0$ рассмотрим укороченное уравнение

$$\alpha w^5 - 3\alpha w^4 + (\delta z^2 + \gamma z + 3\alpha + \beta)w^3 +$$

$$+ (\delta z^2 - \gamma z - \alpha - 3\beta)w^2 + 3\beta w - \beta = 0,$$

на основании которого получаем, что при

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \neq 0,\ \ \delta = 0$$

дифференциальное уравнение (6) имеет решение

$$w\colon z \to 1,\ \forall z \in \mathbb{C};$$

а при

$$\gamma = 0,\ \ \alpha + \beta = 0,\ \ \delta \neq 0$$

имеет решение

$$w\colon z \to -1, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Для уравнения (6) указаны все возможности существования полиномиальных решений. ■

Наиболее значимые исследования по (6) выполнены в [98].

Например, при

$$\alpha = \gamma = \delta = 0$$

уравнение Пенлеве (6) имеет решения

$$w = Cz^{\pm\sqrt{-2\beta}} + 1,$$

где C — произвольная постоянная, среди которых при соответствующем выборе параметра β содержатся и полиномиальные.

Теорема 6. *Шестое неприводимое уравнение Пенлеве*

$$\begin{gathered}
2z^2(z-1)^2w^3w'' - 2z^2(z-1)^2(z+1)w^2w'' + 2z^3(z-1)^2ww'' - \\
-3z^2(z-1)^2w^2(w')^2 + 2z^2(z-1)^2(z+1)w(w')^2 - \\
-z^3(z-1)^2(w')^2 + 2z(z-1)^2(2z-1)w^3w' - 2z(z-1)\cdot \\
\cdot(z^2+2z-1)w^2w' + 2z^3(z-1)ww' - 2\alpha w^6 + \qquad (9) \\
+4\alpha(z+1)w^5 - 2((\alpha+\delta)z^2 + (4\alpha+\beta+\gamma+\delta)z + \alpha - \gamma)w^4 + \\
+4((\alpha+\beta+\gamma+\delta)z + (\alpha+\beta-\gamma-\delta))zw^3 - 2z((\beta+\gamma)z^2 + \\
+(\alpha+4\beta-\gamma+\delta)z + \beta - \delta)w^2 + 4\beta z^2(z+1)w - 2\beta z^3 = 0,
\end{gathered}$$

где α, β, γ *и* δ *— некоторые постоянные, имеет полиномиальные решения* (1.2.1) *степени:*

а) $m \geqslant 2,$ *если* $\alpha = 0,$ *а* $m^2 - 2m + \delta \neq 0;$

б) $m = 1;$

в) $m = 0$ *при* $\beta = 0,$ *при* $\beta = \gamma = 0,$ $\alpha + \delta \neq 0$ *и при* $\alpha \neq 0,$ $\beta = \gamma = 0, \alpha + \delta \neq 0,$ *причём в случае, когда*

$\alpha=\beta=\gamma=\delta=0,$ *существует однопараметрическое семейство решений* $w\colon z\to C, \forall z\in\mathbb{C},$ *где* C *— произвольная постоянная, а при* $\beta=0$ *— решение* $w\colon z\to 0, \forall z\in\mathbb{C}.$

Доказательство. Если $\beta=0,$ то $w\colon z\to 0, \forall z\in\mathbb{C},$ является решением уравнения (9), а при $\alpha=\beta=\gamma=\delta=0$ решением будет $w\colon z\to C, \forall z\in\mathbb{C},$ где C — произвольная постоянная.

Это — тривиальное и тривиальное полиномиальное решения.

Для отыскания нетривиальных полиномиальных решений определим характеристики членов уравнения (9):

$$\beta_0=2,\ b_0=4,\ \varkappa_0=4,\ \mathfrak{m}_0=2,\ \mathfrak{n}_0=2,\ \mathfrak{l}_0=2;$$

$$\beta_1=\,-2,\ b_1=5,\ \varkappa_1=3,\ \mathfrak{m}_1=2,\ \mathfrak{n}_1=3,\ \mathfrak{l}_1=2;$$

$$\beta_2=2,\ b_2=5,\ \varkappa_2=2,\ \mathfrak{m}_2=2,\ \mathfrak{n}_2=3,\ \mathfrak{l}_2=2;$$

$$\beta_3=-3,\ b_3=4,\ \varkappa_3=4,\ \mathfrak{m}_3=2,\ \mathfrak{n}_3=2,\ \mathfrak{l}_3=1;$$

$$\beta_4=2,\ b_4=5,\ \varkappa_4=3,\ \mathfrak{m}_4=2,\ \mathfrak{n}_4=3,\ \mathfrak{l}_4=1;$$

$$\beta_5=\,-1,\ b_5=5,\ \varkappa_5=2,\ \mathfrak{m}_5=2,\ \mathfrak{n}_5=3,\ \mathfrak{l}_5=1;$$

$$\beta_6=4,\ b_6=4,\ \varkappa_6=4,\ \mathfrak{m}_6=1,\ \mathfrak{n}_6=3,\ \mathfrak{l}_6=1;$$

$$\beta_7=\,-2,\ b_7=4,\ \varkappa_7=3,\ \mathfrak{m}_7=1,\ \mathfrak{n}_7=3,\ \mathfrak{l}_7=1;$$

$$\beta_8=2,\ b_8=4,\ \varkappa_8=2,\ \mathfrak{m}_8=1,\ \mathfrak{n}_8=3,\ \mathfrak{l}_8=1;$$

$$\beta_9=\,-2\alpha,\ b_9=0,\ \varkappa_9=6,\ \mathfrak{m}_9=0,\ \mathfrak{n}_9=0,\ \mathfrak{l}_9=0;$$

$$\beta_{10}=4\alpha,\ b_{10}=1,\ \varkappa_{10}=5,\ \mathfrak{m}_{10}=0,\ \mathfrak{n}_{10}=1,\ \mathfrak{l}_{10}=0;$$

$$\beta_{11}=\left[\begin{array}{l}-\,2(\alpha+\delta)\ \text{при}\ \alpha+\delta\neq 0,\\ -\,2(4\alpha+\beta+\gamma-\delta)\gamma\ \text{при}\ \alpha+\delta=0,\ 4\alpha+\beta+\gamma-\delta\neq 0,\\ -\,2(\alpha-\gamma)\ \text{при}\ \alpha+\delta=0,\ 4\alpha+\beta+\gamma-\delta=0,\end{array}\right.$$

$$b_{11} = \begin{bmatrix} 2 \text{ при } \alpha+\delta \neq 0, \\ 1 \text{ при } \alpha+\delta = 0,\ 4\alpha+\beta+\gamma-\delta \neq 0, \\ 0 \text{ при } \alpha+\delta = 0,\ 4\alpha+\beta+\gamma-\delta = 0, \end{bmatrix}$$

$$\varkappa_{11} = 4,\ \mathfrak{m}_{11} = 0,\ \mathfrak{n}_{11} = b_{11},\ \mathfrak{l}_{11} = 0;$$

$$\beta_{12} = \begin{bmatrix} 4(\alpha+\beta+\gamma+\delta) \text{ при } \alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0, \\ 4(\alpha+\beta-\gamma-\delta) \text{ при } \alpha+\beta+\gamma+\delta = 0, \end{bmatrix}$$

$$b_{12} = \begin{bmatrix} 2 \text{ при } \alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0, \\ 1 \text{ при } \alpha+\beta+\gamma+\delta = 0, \end{bmatrix}$$

$$\varkappa_{12} = 3,\ \mathfrak{m}_{12} = 0,\ \mathfrak{n}_{12} = b_{12},\ \mathfrak{l}_{12} = 0;$$

$$\beta_{13} = \begin{bmatrix} -2(\beta+\gamma) \text{ при } \beta+\gamma \neq 0, \\ -2(\alpha+4\beta-\gamma+\delta) \text{ при } \beta+\gamma = 0,\ \alpha+4\beta-\gamma+\delta \neq 0, \\ -2(\beta-\delta) \text{ при } \beta+\gamma = 0,\ \alpha+4\beta-\gamma+\delta = 0, \end{bmatrix}$$

$$b_{13} = \begin{bmatrix} 3 \text{ при } \beta+\gamma \neq 0, \\ 2 \text{ при } \beta+\gamma = 0,\ \alpha+4\beta-\gamma+\delta \neq 0, \\ 1 \text{ при } \beta+\gamma = 0,\ \alpha+4\beta-\gamma+\delta = 0, \end{bmatrix}$$

$$\varkappa_{13} = 2,\ \mathfrak{m}_{13} = 0,\ \mathfrak{n}_{13} = b_{13},\ \mathfrak{l}_{13} = 0;$$

$$\beta_{14} = 4\beta,\ b_{14} = 3,\ \varkappa_{14} = 1,\ \mathfrak{m}_{14} = 0,\ \mathfrak{n}_{14} = 3,\ \mathfrak{l}_{14} = 0;$$

$$\beta_{15} = -2\beta,\ b_{15} = 3,\ \varkappa_{15} = 0,\ \mathfrak{m}_{15} = 0,\ \mathfrak{n}_{15} = 3,\ \mathfrak{l}_{15} = 0.$$

Поскольку при $\alpha \neq 0$ размерности

$$\varkappa_9 = 6 > \varkappa_{10} = 5 > \varkappa_0 = \varkappa_3 = \varkappa_6 = \varkappa_{11} = 4 > \varkappa_1 = \varkappa_4 =$$

$$= \varkappa_7 = \varkappa_{12} = 3 > \varkappa_2 = \varkappa_5 = \varkappa_8 = \varkappa_{13} = 2 > \varkappa_{14} = 1 > \varkappa_{15} = 0,$$

то, по следствию 1.2.2, если число $m \geqslant \mathfrak{l} = 2$ является степенью полиномиального решения уравнения (9), то

$$m \leqslant \max\bigl\{ {}^{9}m^i \colon i = \overline{0, 15}\,,\ i \neq 9 \bigr\} = 1.$$

Стало быть, полиномиальных решений (1.2.1) степени $m \geqslant 2$ у дифференциального уравнения (9) при $\alpha \neq 0$ нет.

При $\alpha = 0$ размерности

$$\varkappa_0 = \varkappa_3 = \varkappa_6 = \varkappa_{11} = 4 > \varkappa_1 = \varkappa_4 = \varkappa_7 = \varkappa_{12} = 3,$$

$$3 > \varkappa_2 = \varkappa_5 = \varkappa_8 = \varkappa_{13} = 2 > \varkappa_{14} = 1 > \varkappa_{15} = 0$$

и

$$\max\bigl\{ {}^{0}m^i \colon i = \overline{1, 15}\,,\ i \notin \{3, 6, 9, 10, 11\} \bigr\} = 1.$$

По утверждению б) теоремы 2.2.2, если число $m \geqslant \mathfrak{l} = 2$ является степенью полиномиального решения уравнения (9), то оно будет корнем уравнения $m^2 - 2m + 2\delta = 0$.

При $m = 1$ рассмотрим укороченное уравнение, которое получаем из (9) отбрасыванием первых трёх членов.

Поскольку

$$S_3(1) = S_4(1) = S_6(1) = S_7(1) = 6 > S_i(1),$$

где $i = \overline{5, 15}\,, i \neq 6,\ i \neq 7,$ то, по лемме 1.2.1, число $m = 1$ будет степенью полиномов-решений уравнения (9).

При $m = 0$ рассматрим укороченное уравнение, которое получаем из (9) отбрасыванием первых девяти членов.

Если $\beta \neq 0,$ то

$$S_{14}(0) = S_{15}(0) = 3 > S_i(0),\ i = \overline{9, 13}\,.$$

По лемме 1.2.1, число $m = 0$ будет степенью полиномиального решения уравнения (9).

Если $\beta = 0,\ |\alpha| + |\gamma| + |\delta| \neq 0,$ то в силу утверждения в) теоремы 1.2.2, если число $m = 0$ является степенью полиномиального решения уравнения (9), то

$$m \geqslant \min\bigl\{ {}^{13}m^i \colon i = \overline{9, 12} \bigr\}.$$

Это возможно в двух случаях, когда $\gamma = 0,\ \alpha + \delta \neq 0$ и когда $\gamma = 0,\ \alpha + \delta = 0,\ \ \alpha \neq 0.$ ■

Например, если $\beta \neq 0, \gamma = 0,$ или $\beta = \gamma = 0, \alpha + \delta \neq 0,$ или $\beta = \gamma = 0, \alpha + \delta = 0, \alpha \neq 0,$ то уравнение Пенлеве (9) имеет решение $w\colon z \to 1, \forall z \in \mathbb{C};$ если $\beta = 0, \delta = \dfrac{1}{2},$ то — решение $w\colon z \to z, \forall z \in \mathbb{C};$ если $\delta = 0, \alpha = \gamma = \dfrac{1}{2}, \beta = -2,$ то — решение $w\colon z \to 2z, \forall z \in \mathbb{C},$ [96; 100].

Теорема 7. *Алгебраическое дифференциальное уравнение*

$$
\begin{gathered}
w^2 w' w''' - w^4 w''' - \Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big) w^2 (w'')^2 - \\
- a_1 w (w')^2 w'' + \Big(4\Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big) - a + a_1\Big) w^3 w' w'' + \\
+ a w^5 w'' - \widetilde{b}_1 (w')^4 + \big(\widetilde{b}_1 - b\big) w^2 (w')^3 + \\
+ \Big(b - c - 4\Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big)\Big) w^4 (w')^2 + (c - d) w^6 w' + d w^8 = 0,
\end{gathered}
\tag{10}
$$

где ν — целое число отличное от нуля; a, b, c, d, a_1 и $\widetilde{b}_1$ суть некоторые постоянные, может иметь полиномиальные решения:

а) *степени $m = 2$ при*

$$
a = c = d = 0,\ b = 4\Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big) = a_1 + 2\widetilde{b}_1,\ a_1 + \widetilde{b}_1 \neq 0,
$$

или при

$$
a \neq 0,\ c + d = 0,\ a + 2b = 8\Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big);
$$

б) *степени $m \geqslant 3$ при выполнении хотя бы одного из условий:*

$$a = c = d = 0,\ b = 4\Bigl(1 - \frac{1}{\nu}\Bigr),\ (b + a_1)(\widetilde{b}_1 - b) \neq 0; \qquad (11)$$

$$a = c = d = 0,\ b = \widetilde{b}_1 = 4\Bigl(1 - \frac{1}{\nu}\Bigr) \neq -a_1; \qquad (12)$$

$$a = c = d = 0,\ b = -a_1 = 4\Bigl(1 - \frac{1}{\nu}\Bigr) \neq \widetilde{b}_1; \qquad (13)$$

$$c = d = 0,\ a\Bigl(b - 4\Bigl(1 - \frac{1}{\nu}\Bigr)\Bigr) \neq 0; \qquad (14)$$

причём при выполнении условий (11), (12), (13) *число* m *должно быть корнем уравнения*

$$(a_1 + \widetilde{b}_1 - 1)m^2 - (b + a_1 - 3)m - 2 = 0, \qquad (15)$$

а при выполнении условий (14) — *корнем уравнения*

$$\Bigl(a + b - 4\Bigl(1 - \frac{1}{\nu}\Bigr)\Bigr)m - a = 0. \qquad (16)$$

Также существуют тривиальное решение, тривиальные полиномиальные решения нулевой степени при $d = 0$, *первой степени при* $b = \widetilde{b}_1 = c = d = 1 - \dfrac{1}{\nu} = 0$ *и второй степени при* $a = a_1 = b = \widetilde{b}_1 = c = d = 1 - \dfrac{1}{\nu} = 0.$

Доказательство. В наличии тривиального и тривиальных полиномиальных решений у дифференциального уравнения (10) убеждаемся непосредственно подстановкой.

Для отыскания нетривиальных полиномиальных решений (1.2.1) определяем характеристики членов уравнения (10):

$$\beta_0 = 1,\ b_0 = 0,\ \varkappa_0 = 4,\ \mathfrak{m}_0 = 4,\ \mathfrak{n}_0 = -4,\ \mathfrak{l}_0 = 3;$$

$$\beta_1 = -1,\ b_1 = 0,\ \varkappa_1 = 5,\ \mathfrak{m}_1 = 3,\ \mathfrak{n}_1 = -3,\ \mathfrak{l}_1 = 3;$$

$$\beta_2 = -\left(1-\frac{1}{\nu}\right),\ b_2=0,\ \varkappa_2=4,\ \mathfrak{m}_2=4,\ \mathfrak{n}_2=-4,\ \mathfrak{l}_2=2;$$

$$\beta_3 = -a_1,\ b_3=0,\ \varkappa_3=4,\ \mathfrak{m}_3=4,\ \mathfrak{n}_3=-4,\ \mathfrak{l}_3=2;$$

$$\beta_4 = 4\left(1-\frac{1}{\nu}\right)-a+a_1,\ b_4=0,\ \varkappa_4=5,\ \mathfrak{m}_4=3,\ \mathfrak{n}_4=-3,\ \mathfrak{l}_4=2;$$

$$\beta_5 = a,\ b_5=0,\ \varkappa_5=6,\ \mathfrak{m}_5=2,\ \mathfrak{n}_5=-2,\ \mathfrak{l}_5=2;$$

$$\beta_6 = -\widetilde{b}_1,\ b_6=0,\ \varkappa_6=4,\ \mathfrak{m}_6=4,\ \mathfrak{n}_6=-4,\ \mathfrak{l}_6=1;$$

$$\beta_7 = \widetilde{b}_1-b,\ b_7=0,\ \varkappa_7=5,\ \mathfrak{m}_7=3,\ \mathfrak{n}_7=-3,\ \mathfrak{l}_7=1;$$

$$\beta_8 = b-c-4\left(1-\frac{1}{\nu}\right),\ b_8=0,\ \varkappa_8=6,\ \mathfrak{m}_8=2,\ \mathfrak{n}_8=-2,\ \mathfrak{l}_8=1;$$

$$\beta_9 = c-d,\ b_9=0,\ \varkappa_9=7\ \mathfrak{m}_9=1,\ \mathfrak{n}_9=-1,\ \mathfrak{l}_9=1;$$

$$\beta_{10} = d,\ b_{10}=0,\ \varkappa_{10}=8,\ \mathfrak{m}_{10}=0,\ \mathfrak{n}_{10}=0,\ \mathfrak{l}_{10}=0.$$

В силу следствия 1.2.2 при выполнении одного из условий:

1) $d\neq 0$;

2) $d=0,\ c\neq 0$;

3) $a=c=d=0,\ b\neq 4\left(1-\dfrac{1}{\nu}\right)$;

4) $a\neq 0,\ c=d=b-4\left(1-\dfrac{1}{\nu}\right)=0$;

5) $a=c=d=b-4\left(1-\dfrac{1}{\nu}\right)=b+a_1=\widetilde{b}_1-b=0$

дифференциальное уравнение (10) не имеет полиномиальных решений степени $m\geqslant 3$.

Пусть $c=d=0,\ a\left(b-4\left(1-\dfrac{1}{\nu}\right)\right)\neq 0$. Тогда

$$\varkappa_5 = \varkappa_8 = 6 > \varkappa_1 = \varkappa_4 = \varkappa_7 = 5,$$

$$5 > \varkappa_0 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = \varkappa_6 = 4,\ \mathfrak{n}_5 = \mathfrak{n}_8 = -2.$$

По утверждению б) теоремы 2.2.2, если уравнение (10) имеет полиномиальное решение степени $m \geqslant 3$, то m является корнем уравнения (16).

Пусть

$$a = c = d = b - 4\Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big) = 0,\ (b + a_1)\big(\widetilde{b}_1 - b\big) \neq 0.$$

Тогда

$$\varkappa_1 = \varkappa_4 = \varkappa_7 = 5 > \varkappa_0 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = \varkappa_6 = 4,\ \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_4 = \mathfrak{n}_7 = -3.$$

По утверждению б) теоремы 2.2.2, если уравнение (10) имеет полиномиальное решение степени $m \geqslant 3$, то m является корнем уравнения (15).

Пусть

$$a = c = d = b - 4\Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big) = b + a_1 = 0,\ \widetilde{b}_1 - b \neq 0.$$

Тогда

$$\varkappa_1 = \varkappa_7 = 5 > \varkappa_0 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = \varkappa_6 = 4,\ \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_7 = -3.$$

По утверждению б) теоремы 2.2.2, если уравнение (10) имеет полиномиальное решение степени $m \geqslant 3$, то m является корнем уравнения (15).

Пусть

$$a = c = d = b - 4\Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big) = \widetilde{b}_1 - b = 0,\ b + a_1 \neq 0.$$

Тогда

$$\varkappa_1 = \varkappa_4 = 5 > \varkappa_0 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = \varkappa_6 = 4,\ \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_4 = -3.$$

По утверждению б) теоремы 2.2.2, если уравнение (10) имеет полиномиальное решение степени $m \geqslant 3$, то m является корнем уравнения (15).

При $m = 2$ рассматрим укороченное уравнение, которое получаем из уравнения (10) отбрасыванием первых двух членов.

На основании следствия 1.2.2 устанавливаем, что при выполнении хотя бы одного из условий

1) $d \neq 0$;

2) $d = 0,\ c \neq 0$;

3)$a = c = d = 0,\ b - 4\Big(1 - \dfrac{1}{\nu}\Big) \neq 0$;

4) $c = d = b - 4\Big(1 - \dfrac{1}{\nu}\Big) = 0,\ a \neq 0$;

5) $a = c = d = b - 4\Big(1 - \dfrac{1}{\nu}\Big) = b + a_1 = 0,\ \widetilde{b}_1 - b \neq 0$;

6) $a = c = d = b - 4\Big(1 - \dfrac{1}{\nu}\Big) = \widetilde{b}_1 - b = 0,\ b + a_1 \neq 0$

дифференциальное уравнение (10) полиномиальных решений степени $m = 2$ не имеет.

Если

$$c = d = 0,\ a + 2b = 8\Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big),\ a \neq 0$$

или

$$a = c = d = 0,\ b = 4\Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big) = a_1 + 2\widetilde{b}_1,\ a_1 + \widetilde{b}_1 \neq 0,$$

то в силу утверждения б) теоремы 2.2.2 уравнение (10) имеет полиномиальные решения степени $m = 2$.

На основании утверждения а) теоремы 2.2.2 при

$$a = c = d = b - \Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big) = \widetilde{b}_1 - b = b + a_1 = 0,\ b \neq 0$$

дифференциальное уравнение (10) полиномиальных решений степени $m = 2$ не имеет.

Итак, при $m = 2$ все логические возможности рассмотрены.

При $m=1$ рассмотрим укороченное уравнение

$$\widetilde{b}_1(w')^4+\big(b-\widetilde{b}_1\big)w^2(w')^3-\Big(b-c-4\Big(1-\frac{1}{\nu}\Big)\Big)w^4(w')^2+$$

$$+(d-c)w^6w'+dw^8=0,$$

у которого (а значит, и у уравнения (10)) в силу следствия 1.2.2 полиномиальных решений (отличных от тривиальных) первой степени нет.

Уравнение (10) нетривиальных полиномиальных решений нулевой степени не имеет. ■

Заметим, что уравнение (10) выделено в работах [104; 107; 108; 109] как уравнение третьего порядка, доставляющее уравнения, решения которых свободны от подвижных критических особых точек. Это уравнение P-типа третьего порядка.

Например, при $a=b=c=a_1+2\widetilde{b}_1=0,\ \nu=1,\ a_1+\widetilde{b}_1\neq 0$ уравнение (10) имеет решение

$$w\colon z\to C_1z^2+C_2z+C_3,\ \forall z\in\mathbb{C},$$

где $4C_1C_3-C_2^2=0.$

При $a_1=\widetilde{b}_1=c=d=a+2b=0,\ \nu=1,\ a\neq 0$ уравнение (10) имеет решение

$$w\colon z\to Cz^2,\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

При $a=b=c=d=\widetilde{b}_1=0,\ \nu=1,\ a=\dfrac{1}{3}$ уравнение (10) имеет решение

$$w\colon z\to Cz^3,\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

При $a=b=c=d=a_1=0,\ \nu=1$ уравнение (10) имеет решение

$$w\colon z\to Cz^4,,\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

Здесь, как и ранее, C — произвольная постоянная.

Глава II

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ В ЦЕЛОМ

Для алгебраических дифференциальных уравнений специальных видов, начиная с исследований E.D. Rainville [189], значительное распространение получил метод построения в целом полиномиальных решений конкретной структуры. В работах M. Bhargava, H. Kaufman [152; 153] впервые была сделана попытка увязать наличие полиномиального решения выбранной структуры со свойствами его степени, дальнейшее распространение данная теория нашла в [74; 82; 129; 130] с последующим обощением П.Р. Лазовым и Д. Димитровски на более общий класс в [76]. Однако все эти исследования не были объеденены одним подходом.

Укажем одно свойство степени полинома, определённого специальным образом.

Пусть полиномы $\widetilde{A}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ и $\widetilde{B}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ такие, что

$$\deg \widetilde{A}(z) \geqslant \deg \widetilde{B}(z).$$

Полином

$$\widetilde{\gamma}(z) = \left[\left(-\frac{\widetilde{A}(z)}{\widetilde{B}(z)} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right], \tag{1}$$

где δ — некоторое натуральное число, символ $[\,]$ означает полиномиальную часть разложения по убывающим степеням z. Полином $\widetilde{Q}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ найдём из тождества

$$\widetilde{A}(z) = -\widetilde{B}(z) \cdot \widetilde{\gamma}^{\delta}(z) - \widetilde{Q}(z), \ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Лемма 1. *Степень полинома* $\widetilde{Q}$, *определяемого тождеством* (2)*, такая, что*

$$\deg \widetilde{Q}(z) < \deg \widetilde{B}(z) + (\delta - 1) \deg \widetilde{\gamma}(z). \tag{3}$$

Доказательство. Из (1) с учётом тождества (2) получаем:

$$\widetilde{\gamma}(z) = \left[\sqrt[\delta]{\widetilde{\gamma}^{\delta}(z) + \frac{\widetilde{Q}(z)}{\widetilde{B}(z)}} \right] = \left[\widetilde{\gamma}(z) \sqrt[\delta]{1 + \frac{\widetilde{Q}(z)}{\widetilde{B}(z)\widetilde{\gamma}^{\delta}(z)}} \right] =$$

$$= \left[\widetilde{\gamma}(z) \left(1 + \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\widetilde{Q}(z)}{\widetilde{B}(z)\widetilde{\gamma}^{\delta}(z)} + \frac{1-\delta}{2!\delta^2} \cdot \frac{\widetilde{Q}^2(z)}{\widetilde{B}^2(z)\widetilde{\gamma}^{2\delta}(z)} + \ldots \right) \right] =$$

$$= \widetilde{\gamma}(z) + \widetilde{R}(z),$$

где полином

$$\widetilde{R}(z) = \left[\frac{1}{\delta} \cdot \frac{\widetilde{Q}(z)}{\widetilde{B}(z)\widetilde{\gamma}^{\delta-1}(z)} + \frac{1-\delta}{2!\delta^2} \cdot \frac{\widetilde{Q}^2(z)}{\widetilde{B}^2(z)\widetilde{\gamma}^{2\delta-1}(z)} + \ldots \right].$$

Если

$$\deg \widetilde{Q}(z) \geqslant \deg \widetilde{B}(z) + (\delta - 1) \deg \widetilde{\gamma}(z),$$

то $\widetilde{R}$ — полином, не равный тождественно нулю, и получаем противоречие

$$\widetilde{\gamma}(z) = \widetilde{\gamma}(z) + \widetilde{R}(z),$$

доказывающее утверждение леммы 1. ■

В некоторых случаях можно указать достаточные условия наличия максимального числа полиномиальных решений определённой структуры. Для этих исследований необходима

Лемма 2. *Пусть*

$$\varepsilon = \cos \frac{2\pi}{\delta} + \sqrt{-1}\, \sin \frac{2\pi}{\delta}\,.$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{\delta} \varepsilon^{j\nu} = 0, \tag{4}$$

если ν *— целое число, отличное от нуля и не кратное* δ;

$$\sum_{j=1}^{\delta} \varepsilon^{j\nu} = \delta, \tag{5}$$

если ν *— целое число, кратное* δ.

Доказательство[1]. Вычислим сумму

$$\sum_{j=1}^{\delta} \varepsilon^{j\nu} = \sum_{j=1}^{\delta} \Bigl(\cos\frac{2\pi}{\delta} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{\delta}\Bigr)^{j\nu} =$$

$$= \sum_{j=1}^{\delta} \cos\Bigl(\frac{2\pi\nu}{\delta}\, j\Bigr) + \sqrt{-1}\, \sum_{j=1}^{\delta} \sin\Bigl(\frac{2\pi\nu}{\delta}\, j\Bigr).$$

Пусть ν не кратно δ, т.е. $\dfrac{\nu}{\delta}$ не является целым числом. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\delta} \cos\Bigl(\frac{2\pi\nu}{\delta}\, j\Bigr) = \Bigl(2\sin\frac{\pi\nu}{\delta}\Bigr)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{\delta} 2\sin\frac{\pi\nu}{\delta}\, \cos\Bigl(\frac{2\pi\nu}{\delta}\, j\Bigr).$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{\delta} 2\sin\frac{t}{2}\, \cos(tj) = \sum_{j=1}^{\delta} \Bigl(\sin\Bigl(j + \frac{1}{2}\Bigr)t - \sin\Bigl(j - \frac{1}{2}\Bigr)t\Bigr) =$$

$$= \,-\sin\frac{1}{2}\, t + \sin\Bigl(\delta + \frac{1}{2}\Bigr)t = 2\cos\frac{\delta+1}{2}\, t \sin\frac{\delta}{2}\, t,$$

[1] В [128; 103, с. 41 − 42] иное доказательство.

а $\sin\dfrac{\delta}{2}\,t = \sin\pi\nu = 0,$ то

$$\sum_{j=1}^{\delta}\cos\Big(\frac{2\pi\nu}{\delta}\,j\Big) = 0.$$

Аналогично,

$$\sum_{j=1}^{\delta}\sin\Big(\frac{2\pi\nu}{\delta}\,j\Big) = \Big(2\sin\frac{\pi\nu}{\delta}\Big)^{-1}\cdot\sum_{j=1}^{\delta}2\sin\frac{\pi\nu}{\delta}\ \sin\Big(\frac{2\pi\nu}{\delta}\,j\Big).$$

Так как

$$\sum_{j=1}^{\delta}2\sin\frac{t}{2}\ \sin tj = \sum_{j=1}^{\delta}\Big(\cos\Big(j-\frac{1}{2}\Big)t - \cos\Big(j+\frac{1}{2}\Big)t\Big) =$$

$$= \cos\frac{1}{2}\,t - \cos\Big(\delta+\frac{1}{2}\Big)t = 2\sin\frac{\delta+1}{2}\,t\sin\frac{\delta}{2}\,t,$$

а $\sin\dfrac{\delta}{2}\,t = \sin\pi\nu = 0,$ то

$$\sum_{j=1}^{\delta}\sin\Big(\frac{2\pi\nu}{\delta}\,j\Big) = 0.$$

Равенство (4) доказано.

Пусть ν кратно δ, т.е. существует такое натуральное число S, что $\nu = S\delta$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\delta}\cos\Big(\frac{2\pi\nu}{\delta}\,j\Big) = \sum_{j=1}^{\delta}\cos 2\pi Sj = \delta,$$

$$\sum_{j=1}^{\delta}\sin\Big(\frac{2\pi\nu}{\delta}\,j\Big) = \sum_{j=1}^{\delta}\sin 2\pi Sj = 0.$$

Равенство (5) доказано. ■

Комплексное число ε является одним из значений $\sqrt[\delta]{1}$, ибо $\varepsilon^{\delta} = \cos 2\pi + \sqrt{-1}\sin 2\pi$. Остальные $\delta - 1$ значений корня $\sqrt[\delta]{1}$ можно получить, возводя ε в степень с показателями $2, 3, \ldots, \delta$.

Обозначим ε_t корни уравнения $\varepsilon^{\delta} = 1$ и будем считать, что

$$\varepsilon_1 = \varepsilon,\ \varepsilon_2 = \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon_{\delta} = \varepsilon^{\delta}. \tag{6}$$

§ 1. Структурный метод построения полиномиальных решений

Рассмотрим алгебраическое дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=0}^{T} A_i(z)\Phi_i\bigl(z, w, w', w'', \ldots, w^{(\lambda_i)}\bigr) = 0, \tag{1}$$

где A_i и Φ_i $(i = \overline{0, T}\,)$ — полиномы своих аргументов.

Лемма 1. *Если число m является степенью полиномиального решения* (1.2.1.1) *алгебраического дифференциального уравнения* (1.1.1.1), *то это уравнение приводится к виду* (1), *для которого справедливы соотношения*

$$\begin{gathered} a_{\tau} + \varphi_{\tau}(m) < a_j + \varphi_j(m) = a_r + \varphi_r(m), \\ \tau = \overline{0, T}\,,\ \tau \ne j,\ \tau \ne r,\ r \ne j,\ r, j \in \{0, 1, \ldots, T\}, \end{gathered} \tag{2}$$

где w — полином (1.2.1.1),

$$\varphi_i(m) = \deg \Phi_i(z, w(z), w'(z), \ldots, w^{(\lambda_i)}(z)),$$

$$a_i = \deg A_i(z),\ i = \overline{0, T}\,.$$

Доказательство. Если подставить полином w степени m в уравнение (1.1.1.1), то получим тождество, у которого должно быть, в силу леммы 1.2.1.1, не менее двух членов с одинаковыми наибольшими степенями.

Если таких членов два, то лемма доказана.

Если же таких членов больше двух, то их сгруппируем.

Поскольку при сложении полиномов одинаковой степени степень суммы не возрастает, то m является степенью полиномиального решения (1.2.1.1) при условии (2). ■

Без ограничения общности рассуждений будем считать, что в уравнении (1) два члена с номерами r и j имеют вид

$$\begin{gathered}\Phi_k\big(z, w, w', w'', \dots, w^{(\lambda_k)}\big) = \\ = \mathfrak{C}^l\big(z, w, w', \dots, w^{(\gamma)}\big)\mathfrak{D}_k^\delta\big(z, w, w', \dots, w^{(\rho_k)}\big),\ k = r,\ k = j,\end{gathered} \tag{3}$$

где $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}_k$ — полиномы своих аргументов; l, γ и ρ_k — целые неотрицательные числа, $\lambda_k = \max\{\gamma, \rho_k\}$, $\delta \in \mathbb{N}$, $k = r$, $k = j$.

Будем считать, что

$$\deg A_r(z) = a_r \geqslant \deg A_j(z) = a_j.$$

Полином

$$\gamma(z) = \left[\left(-\frac{A_r(z)}{A_j(z)}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right], \tag{4}$$

где δ — натуральное число из (3), а символ $[\,]$ означает полиномиальную часть разложения по убывающим степеням z.

Полином Q определим по правилу (2.0.0) из тождества

$$A_r(z) = -A_j(z)\gamma^\delta(z) - Q(z),\ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{5}$$

Заменяя в дифференциальном уравнении (1) коэффициент A_r, используя его выражение через полиномы A_j, γ и Q по формуле (5), получаем

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}\big(z, w, w', \dots, w^{(\lambda)}\big) = A_j(z)\mathfrak{C}^l\big(z, w, w', w'', \dots, w^{(\gamma)}\big)\cdot \\ \cdot\big(\mathfrak{D}_j^\delta\big(z, w, w', \dots, w^{(\rho_j)}\big) - \gamma^\delta(z)\mathfrak{D}_r^\delta\big(z, w, w', \dots, w^{(\rho_r)}\big)\big),\end{gathered} \tag{6}$$

где выражение

$$\mathfrak{A}(z, w, w', \ldots, w^{(\lambda)}) =$$

$$= Q(z)\Phi_r\big(z, w, w', \ldots, w^{(\lambda_r)}\big) - \mathfrak{B}\big(z, w, w', \ldots, w^{(\beta)}\big)$$

при

$$\mathfrak{B}\big(z, w, w', \ldots, w^{(\beta)}\big) =$$

$$= \sum_{\substack{\tau = 0, \\ \tau \neq r, \tau \neq j}}^{T} A_\tau(z)\Phi_\tau\big(z, w, w', \ldots, w^{(\lambda_\tau)}\big).$$

Введём условные обозначения:

$$\mathfrak{A}(z; w(z)) = \mathfrak{A}\big(z, w(z), w'(z), \ldots, w^{(\lambda)}(z)\big),$$

$$\mathfrak{C}(z; w(z)) = \mathfrak{C}\big(z, w(z), w'(z), \ldots, w^{(\gamma)}(z)\big),$$

$$\mathfrak{D}_k(z; w(z)) = \mathfrak{D}_k\big(z, w(z), w'(z), \ldots, w^{(\rho_k)}(z)\big),\ k = r,\ k = j,$$

где w — полином степени m, а также:

$$\mathfrak{A}(m) = \deg \mathfrak{A}(z; w(z)), \quad \mathfrak{C}(m) = \deg \mathfrak{C}(z; w(z)),$$

$$\mathfrak{D}_k(m) = \deg \mathfrak{D}_k(z; w(z)),\ k = r,\ k = j,\ \ \gamma = \deg \gamma(z).$$

При этом в силу (4)

$$\gamma = \frac{a_r - a_j}{\delta}\,.$$

Теорема 1. *Если полином w степени m, удовлетворяющей соотношениям* (2), *является полиномиальным решением алгебраического дифференциального уравнения* (1) *при* (3), *то полином w является решением уравнения*

$$\mathfrak{C}\big(z, w, w', \ldots, w^{(\gamma)}\big) = 0 \tag{7}$$

или решением хотя бы одного из уравнений

$$\mathfrak{D}_j\bigl(z, w, w', \ldots, w^{(\rho_j)}\bigr) - \\ - \varepsilon_t \gamma(z) \mathfrak{D}_r\bigl(z, w, w', \ldots, w^{(\rho_r)}\bigr) = \varepsilon_t \mathfrak{P}(z),\ t = \overline{1, \delta}\,, \tag{8}$$

где ε_t *— корни уравнения* $\varepsilon^\delta = 1$, $\mathfrak{P}$ *— некоторый полином степени* $\mathfrak{f}$, *определяемой соотношением*

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{A}(m) - a_j - l\mathfrak{C}(m) - (\delta - 1)(\gamma - \mathfrak{D}_r(m)), \tag{9}$$

причём, если $\mathfrak{f} < 0$, *то* $\mathfrak{P}(z) \equiv 0$.

Полином w, *являющийся решением уравнения* (7), *будет решением уравнения* (1) *при* (3), *если и только если*

$$\mathfrak{B}(z; w(z)) = 0,\ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{10}$$

При $\mathfrak{f} < 0$ *полином* w, *являющийся решением хотя бы одного из уравнений* (8), *будет решением уравнения* (1) *при* (3) *тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{A}(z; w(z)) = 0,\ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{11}$$

Доказательство. Поскольку

$$a_r + \varphi_r(m) = a_j + \varphi_j(m),$$

то, учитывая задание (3),

$$a_r + l\mathfrak{C}(m) + \delta\mathfrak{D}_r(m) = a_j + l\mathfrak{C}(m) + \delta\mathfrak{D}_j(m)$$

или

$$\mathfrak{D}_j(m) = \mathfrak{D}_r(m) + \gamma. \tag{12}$$

Из соотношений (2) следует, что

$$\deg \mathfrak{B}(z; w(z)) < a_j + \varphi_j(m) = a_j + l\mathfrak{C}(m) + \delta\mathfrak{D}_j(m).$$

По лемме 1.0.0, для полиномов, связанных соотношениями (4) и (5), выполняется неравенство (3.0.0), которое в принятых обозначениях имеет вид

$$\deg Q(z) < a_j + (\delta - 1)\gamma.$$

Тогда с учётом равенства (12) степень

$$\deg(Q(z)\Phi_r(z;w(z))) < a_j + (\delta-1)\gamma + l\mathfrak{C}(m) + \delta\mathfrak{D}_r(m) =$$

$$= a_j + l\mathfrak{C}(m) + \delta(\gamma + \mathfrak{D}_r(m)) - \gamma =$$

$$= (a_j + l\mathfrak{C}(m) + \delta\mathfrak{D}_j(m)) - \gamma \leqslant a_j + l\mathfrak{C}(m) + \delta\mathfrak{D}_j(m).$$

Следовательно,

$$\mathfrak{A}(m) < a_j + l\mathfrak{C}(m) + \delta\mathfrak{D}_j(m). \tag{13}$$

Полином w степени m, удовлетворяющий условиям (2), будет решением уравнения (1) при (3) тогда и только тогда, когда

$$\begin{gathered}\mathfrak{A}(z;w(z)) - A_j(z)\mathfrak{C}^l(z;w(z))\cdot\\ \cdot\big(\mathfrak{D}_j^\delta(z;w(z)) - \gamma^\delta(z)\mathfrak{D}_r^\delta(z;w(z))\big) = 0,\ \forall z \in \mathbb{C}.\end{gathered} \tag{14}$$

Относительно $\mathfrak{C}(z;w(z))$ представляются возможности:

$$\mathfrak{C}(z;w(z)) \equiv 0 \tag{15}$$

или

$$\mathfrak{C}(z;w(z)) \not\equiv 0. \tag{16}$$

При (15) для выполнения тождества (14) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось (10).

Пусть имеет место соотношение (16). Тогда почленно разделим тождество (14) на полином $A_j(z)\mathfrak{C}^l(z;w(z))$ и будем иметь

$$\mathfrak{G}(z;w(z)) = \mathfrak{D}_j^\delta(z;w(z)) - \gamma^\delta(z)\ \mathfrak{D}_r^\delta(z;w(z)),\ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{17}$$

где

$$\mathfrak{G}(z;w(z)) = \frac{\mathfrak{A}(z;w(z))}{A_j(z)\mathfrak{C}^l(z;w(z))}$$

и является полиномом комплексного переменного z, так как в правой части тождества (17) расположен некоторый полином.

Кроме того, степень $\mathfrak{G}(m) = \deg \mathfrak{G}(z; w(z))$ определяется по формуле

$$\mathfrak{G}(m) = \mathfrak{A}(m) - a_j - l\mathfrak{C}(m). \tag{18}$$

Разрешая (17) относительно $\mathfrak{D}_j(z; w(z))$, получаем

$$\mathfrak{D}_j(z; w(z)) = \left[\left(\gamma^\delta(z)\mathfrak{D}_r^\delta(z; w(z)) + \mathfrak{G}(z; w(z))\right)^{\frac{1}{\delta}}\right] =$$

$$= \left[\gamma(z)\mathfrak{D}_r(z; w(z))\left(1 + \frac{\mathfrak{G}(z; w(z))}{\gamma^\delta(z)\mathfrak{D}_r^\delta(z; w(z))}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right] =$$

$$= \left[\gamma(z)\mathfrak{D}_r(z; w(z)) + \frac{1}{\delta} \cdot \frac{\mathfrak{G}(z; w(z))}{\gamma^{\delta-1}(z)\mathfrak{D}_r^{\delta-1}(z; w(z))} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\delta}{2!\delta^2} \cdot \frac{\mathfrak{G}^2(z; w(z))}{\gamma^{2\delta-1}(z)\mathfrak{D}_r^{2\delta-1}(z; w(z))} + \ldots \right] = \gamma(z)\mathfrak{D}_r(z; w(z)) + \mathfrak{P}(z),$$

где

$$\mathfrak{P}(z) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\left(-\frac{1}{\delta}\right)_k \cdot \frac{\mathfrak{G}^k(z; w(z))}{(\gamma(z)\mathfrak{D}_r(z; w(z)))^{k\delta-1}}\right] \tag{19}$$

и является полиномом степени $\mathfrak{f} = \deg \mathfrak{P}(z)$; $(a)_k$ — символ Похгаммера.

Определим $\mathfrak{f}$. Степень полиномиальной части k-го члена ряда из (19) определяется по формуле

$$k\mathfrak{G}(m) - (k\delta - 1)(\gamma + \mathfrak{D}_r(m)). \tag{20}$$

Учитывая (18), находим, что

$$k\mathfrak{G}(m) - (k\delta - 1)(\gamma + \mathfrak{D}_r(m)) =$$

$$= k(\mathfrak{G}(m) - a_j - l\mathfrak{C}(m) - \delta(\gamma + \mathfrak{D}_r(m))) + \gamma + \mathfrak{D}_r(m).$$

Поскольку уравнение (1) рассматривается при условии (2), то есть, когда выполняются соотношения (12) и (13), то на основании последнего равенства получаем, что с ростом номера число (20) убывает.

Стало быть, степень $\mathfrak{f}$ полинома $\mathfrak{P}(z)$ определяется соотношением (9).

Из задания (19) следует, что при $\mathfrak{f} < 0$ полином $\mathfrak{P}(z) \equiv 0$.

Таким образом, доказано, что, для того чтобы полином w степени m, удовлетворяющей соотношениям (2), был решением уравнения (1) при (3) и условии (16), необходимо, чтобы он был решением хотя бы одного из уравнений (8).

В случае $\mathfrak{P}(z) \equiv 0$ из тождества (14) и равенств (8) получаем, что выполнение тождества (11) является необходимым и достаточным условием наличия полиномиального решения w степени m, удовлетворяющей условиям (2), у дифференциального уравнения (1) при (3).

Обратим внимание на то, что доказательство теоремы 1 велось при условии (2), а утверждения второго и третьего абзаца теоремы сформулированы без учёта таких условий. На основании аналогичных рассуждений без учёта (2) можно убедиться в справедливости утверждений в общем случае, как это и было сформулировано. ■

Таким образом, полиномиальные решения (1.2.1.1) алгебраического дифференциального уравнения (1.1.1.1) могут быть найдены последовательным выполнением следующих шагов.

1. Приведение уравнения (1.1.1.1) к виду (1), для которого справедливы соотношения (2), то есть, к уравнению, у которого ровно две составляющие имеют одинаковые наибольшие степени при подстановке полинома $w\colon z \to w(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

2. Нахождение семейства (структуры) полиномов степени m, удовлетворяющей соотношениям (2), на основании уравнений (7) и (8) теоремы 1.

3. Выделение из всего множества полиномов полученной структуры тех, которые являются решениями уравнения (1.1.1.1).

Приведение уравнения (1.1.1.1) к виду (1) при (2) может быть осуществлено произвольной группировкой членов уравнения (1.1.1.1), лишь бы только в результате выполнялось условие (2).

В некоторых случаях целесообразно приводить дифференциальное уравнение (1.1.1.1) к специальным видам, для которых теорема 1 позволяет получить достаточно полную информацию о полиномиальных решениях. Укажем некоторые классы таких дифференциальных уравнений.

Если[1]

$$\mathfrak{C}\big(z, w, w', \ldots, w^{(\gamma)}\big) = 1,$$

то уравнение (1) может быть записано в виде

$$\begin{gathered}\mathfrak{B}\big(z, w, w', \ldots, w^{(\beta)}\big) + A_r(z)\mathfrak{D}_r^{\delta}\big(z, w, w', \ldots, w^{(\rho_r)}\big) + \\ + A_j(z)\mathfrak{D}_j^{\delta}\big(z, w, w', \ldots, w^{(\rho_j)}\big) = 0.\end{gathered} \tag{21}$$

Тогда, как следствие теоремы 1, справедлива

Теорема 2. *Если полином w степени m такой, что*

$$f(m) < a_r + \delta\mathfrak{D}_r(m) = a_j + \delta\mathfrak{D}_j(m), \tag{22}$$

где $f(m) = \deg \mathfrak{B}(z; w(z))$, является решением уравнения (21), *то этот полином будет решением хотя бы одного из уравнений* (8), *где $\mathfrak{P}$ — некоторый полином степени*

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{A}(m) - a_j - (\delta - 1)\mathfrak{D}_j(m), \tag{23}$$

причём, если $\mathfrak{f} < 0$, то $\mathfrak{P}(z) \equiv 0$.

Если $\mathfrak{f} < 0$, то полином w, являющийся решением хотя бы одного из уравнений (8), *будет решением уравнения* (21) *тогда и только тогда, когда имеет место тождество* (11).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered}-2zw^3w''' + zw^4w'' - (w')^3 + 3w^2(w')^2 - 3w^4w' + \\ + w^6 - z^{12}w^3 + w + 64z^9 - z^4 = 0.\end{gathered} \tag{24}$$

Поскольку

$$S_0(m) = 4m-2,\ D(S_0) = \mathbb{N}\backslash\{1, 2\}; \quad S_1(m) = 5m-1,\ D(S_1) = \mathbb{N}\backslash\{1\};$$

$$S_2(m) = 3m-3,\ D(S_2) = \mathbb{N}; \quad S_3(m) = 4m-2,\ D(S_3) = \mathbb{N};$$

[1] Условие $\mathfrak{C}(z, w, w', \ldots, w^{(\gamma)}) = 1$ соответствует тому, что $l = 0$.

$$S_4(m) = 5m - 1,\ D(S_4) = \mathbb{N};\quad S_5(m) = 6m,\ D(S_5) = \mathbb{N}_0;$$

$$S_6(m) = 3m + 12,\ D(S_6) = \mathbb{N}_0;\quad S_7(m) = m,\ D(S_7) = \mathbb{N}_0;$$

$$S_8(m) = 9,\ D(S_8) = \mathbb{N}_0,$$

то в силу леммы 1.2.1.1 только число $m = 4$ может быть степенью полиномиальных решений уравнения (24).

Группировкой членов уравнение (24) приводим к виду

$$-2zw^3w''' + zw^4w'' + w + 64z^9 - z^4 - z^{12}w^3 + (w^2 - w')^3 = 0, \quad (24\text{A})$$

соответствующему (21) при

$$A_r\colon z \to -z^{12},\ A_j\colon z \to 1,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \delta = 3.$$

Так как

$$f(4) = 19,\ a_r = 12,\ a_j = 0,\ \mathfrak{D}_r(4) = 4,\ \mathfrak{D}_j(4) = 8,$$

то для уравнения (24А) выполняется условие (22), а значит, можно использовать теорему 2.

По формулам (4) и (5) находим полиномы

$$\gamma\colon z \to z^4,\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{и} \quad Q\colon z \to 0,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Тогда $\mathfrak{A}(4) = f(4) = 19$, и по формуле (23) находим, что $\mathfrak{f} = 3$.

Уравнения (8) имеют вид

$$w^2 - w' - \varepsilon_t z^4 w = \varepsilon_t \mathfrak{P}_3(z),\ t = \overline{1,3}\,,$$

полиномиальными решениями четвёртой степени которых являются

$$w\colon z \to \varepsilon_t z^4,\ \forall z \in \mathbb{C},\ t = \overline{1,3}\,.$$

Непосредственно подстановкой устанавливаем, что только

$$w\colon z \to z^4,\ \ \forall z \in \mathbb{C},$$

является полиномиальным решением уравнения (24).

Если

$$\mathfrak{D}_r\big(z, w, w', \ldots, w^{(\rho_r)}\big) = 1,$$

то уравнение (3) может быть записано в виде

$$\begin{gathered}\mathfrak{B}\bigl(z,w,w',\ldots,w^{(\rho_r)}\bigr)+\mathfrak{C}^l\bigl(z,w,w',\ldots,w^{(\gamma)}\bigr)\bigl(A_r(z)+\\ +A_j(z)\mathfrak{D}_j^{\delta}\bigl(z,w,w',\ldots,w^{(\rho_j)}\bigr)\bigr)=0.\end{gathered}\tag{25}$$

Тогда, как следствие теоремы 1, справедлива

Теорема 3. *Если полином w степени m такой, что*

$$f(m) < a_r + l\mathfrak{C}(m),\ a_j = a_r - \delta\mathfrak{D}_j(m),\tag{26}$$

является решением уравнения (25), *то этот полином будет решением уравнения* (7) *или решением хотя бы одного из уравнений*

$$\mathfrak{D}_j\bigl(z,w,w',\ldots,w^{(\rho_j)}\bigr)=\varepsilon_t\gamma(z)+\varepsilon_t\mathfrak{P}(z),\ t=\overline{1,\delta}\,,\tag{27}$$

где $\mathfrak{P}$ — некоторый полином степени

$$\mathfrak{f}=\mathfrak{A}(m)-a_j-l\mathfrak{C}(m)-(\delta-1)\mathfrak{D}_j(m),\tag{28}$$

причём, если $\mathfrak{f}<0$, то $\mathfrak{P}(z)\equiv 0$.

Полином w, являющийся решением уравнения (7), *будет решением уравнения* (25), *если и только если выполняется тождество* (10).

Если $\mathfrak{f}<0$, то полином w, являющийся решением хотя бы одного из уравнений (27), *будет решением уравнения* (25) *тогда и только тогда, когда имеет место тождество* (11).

Пример 2. Группировкой членов уравнение (24) приводим к виду

$$\begin{gathered}zw^4w''-(w')^3+3w^2(w')^2+w+64z^9-z^4+\\ +w^3(-z^{12}+(\,-2zw'''-3ww'+w^3))=0,\end{gathered}\tag{24Б}$$

соответствующему (25) при

$$A_r\colon z\to\,-z^{12},\ A_j\colon z\to 1,\ \forall z\in\mathbb{C},\ l=3,\ \delta=1.$$

Поскольку $f(4)=19$, $a_r=12$, $a_j=0$, $\mathfrak{C}(4)=4$, $\mathfrak{D}_j(4)=12$, то для уравнения (24Б) выполняются условия (26), а значит, можно использовать теорему 3.

Прежде всего заметим, что $\mathfrak{f}=7$.

Уравнение (7) имеет вид $w=0$ и у него нет полиномиальных решений четвёртой степени.

Уравнения (27) для (24Б) имеют вид

$$-2zw''' - 3ww' + w^3 = z^{12} + \mathfrak{P}_7(z),$$

полиномиальными решениями степени $m=4$ которого являются

$$w\colon z \to \varepsilon_t z^4,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \ t = \overline{1,3}\,.$$

Непосредственно подстановкой устанавливаем, что только полином

$$w\colon z \to z^4,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

является решением уравнения (24Б).

Пример 3. Уравнение

$$\begin{gathered} z^{26}(w^{(IV)})^5 + 10zw^6(w'')^4 - 40z^7(w'')^2 + 20zw^{12} - \\ -80zw^9 - 2z^2 + 64z + w'(-z(z^{29}-1) + (w^3)^5 - w'') = 0 \end{gathered} \tag{29}$$

относиться к классу уравнений (25), где

$$A_r\colon z \to -z(z^{29}-1),\ A_j\colon z \to 1,\ \forall z \in \mathbb{C},\ l=1,\ \delta=5.$$

В силу леммы 1.2.1.1 только число $m=2$ может быть степенью полиномиальных решений дифференциального уравнения (29).

Поскольку

$$f(2)=25,\ a_r=30,\ a_j=0,\ \mathfrak{C}(2)=1,\ \mathfrak{D}_j(2)=6,$$

то для уравнения (29) выполняются соотношения (26), и, стало быть, можем использовать теорему 3.

По формуле (28) находим, что $\mathfrak{f}=0$, так как

$$\gamma\colon z \to z^6,\ Q\colon z \to -z,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \mathfrak{A}(2)=25.$$

Уравнение (7) имеет вид $w'=0$ и у него нет полиномиальных решений второй степени.

Уравнения (27) для (29) имеют вид

$$w^3 - w'' = \varepsilon_t z^6 + \varepsilon_t \mathfrak{P}_0(z),\ t = \overline{1,5}\,,$$

полиномиальными решениями степени $m=2$ которых являются

$$w\colon z\to \varepsilon_\tau z^2,\ \forall z\in\mathbb{C},\ \tau=\overline{1,5}\,.$$

Непосредственно подстановкой устанавливаем, что только

$$w\colon z\to z^2,\ \forall z\in\mathbb{C},$$

является полиномиальным решением уравнения (29).

Если

$$\mathfrak{D}_r\bigl(z,w,w',\ldots,w^{(\rho_r)}\bigr)=1,$$

$$\mathfrak{C}\bigl(z,w,w',\ldots,w^{(\gamma)}\bigr)=\mathfrak{D}_j\bigl(z,w,w',\ldots,w^{(\rho_j)}\bigr),$$

то уравнение (1) при (3) запишем в виде[1]

$$\begin{gathered}\mathfrak{B}\bigl(z,w,w',\ldots,w^{(\beta)}\bigr)+A_r(z)\mathfrak{C}^l\bigl(z,w,w',\ldots,w^{(\gamma)}\bigr)+\\ +A_j(z)\mathfrak{C}^{l+\delta}\bigl(z,w,w',\ldots,w^{(\gamma)}\bigr)=0.\end{gathered}\tag{30}$$

Как следствие теоремы 1 справедлива

Теорема 4. *Полиномильное решение w степени m, удовлетворяющей условиям*

$$f(m)<a_r+l\mathfrak{C}(m),\ \ a_j=a_r-\delta\mathfrak{C}(m),\tag{31}$$

уравнения (30), *будет решением уравнения* (7) *или решением хотя бы одного из уравнений*

$$\mathfrak{C}(z,w,w',\ldots,w^{(\gamma)})=\varepsilon_t\gamma(z)+\varepsilon_t\mathfrak{P}(z),\ t=\overline{1,\delta}\,,\tag{32}$$

где $\mathfrak{P}$ — некоторый полином степени

$$\mathfrak{f}=\mathfrak{A}(m)-a_j-(l+\delta-1)\mathfrak{C}(m),\tag{33}$$

причём, если $\mathfrak{f}<0$, то $\mathfrak{P}(z)\equiv 0$.

Полином w, являющийся решением уравнения (7), *будет решением уравнения* (30), *если и только если выполняется тождество* (10).

[1] Уравнение (30) является частным видом уравнения (25).

Если $\mathfrak{f} < 0,$ *то полином* $w,$ *являющийся решением хотя бы одного из уравнений* (32), *будет решением уравнения* (30) *тогда и только тогда, когда имеет место тождество* (11).

Пример 4. Уравнение

$$zw^{(VI)} - w^{(V)} + zw'' + (w')^4 + z^4(w')^2 - 5w' - \\ - 1296z^{20} - z^2(z^{22}+36)(w-2)^2 + (w-2)^6 = 0, \tag{34}$$

относится к классу (30), где

$$A_r\colon z \to\ - z^2(z^{22}+36),\ A_j\colon z \to 1, \forall z \in \mathbb{C},\ l = 2,\ \delta = 4.$$

На основании леммы 1.2.1.1 устанавливаем, что степенью полиномиального решения уравнения (34) может быть только число $m = 6.$

Теорема 4 применима к уравнению (34), так как

$$f(6) \leqslant 20,\ a_r = 24,\ a_j = 0,\ \mathfrak{C}(6) = 6.$$

По формуле (33) устанавливаем, что $\mathfrak{f} \leqslant\ - 10,$ так как

$$\gamma\colon z \to z^6,\ \ Q\colon z \to 36z^2,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \mathfrak{A} \leqslant 20.$$

Уравнение (7) имеет вид $w - 2 = 0,$ и у него нет полиномиальных решений шестой степени.

Уравнения (32) имеют вид

$$w - 2 = \varepsilon_t z^6 + 2,\ t = \overline{1,4}\,,$$

для которых справедливы тождества (11), а значит, полиномиальными решениями уравнения (34) являются

$$w_1\colon z \to z^6 + 2,\ \forall z \in \mathbb{C};\quad w_2\colon z \to\ - z^6 + 2,\ \forall z \in \mathbb{C};$$

$$w_3\colon z \to \sqrt{-1}\,z^6 + 2,\ \forall z \in \mathbb{C};\quad w_4\colon z \to\ - \sqrt{-1}\,z^6 + 2,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Если

$$\mathfrak{D}_r(z,w,w',\ldots,w^{(\rho_r)}) = 1,\ \mathfrak{D}_j(z,w,w',\ldots,w^{(\rho_j)}) = w^{(\rho)},$$

то уравнение (1) при (3) может быть записано в виде[1]

$$\mathfrak{B}\big(z, w, w', \ldots, w^{(\beta)}\big) + \\ \mathfrak{C}^l\big(z, w, w', \ldots, w^{(\gamma)}\big)\big(A_r(z) + A_j(z)\big(w^{(\rho)}\big)^{\delta}\big) = 0. \tag{35}$$

Как следствие теоремы 1 справедлива

Теорема 5. *Полиномиальное решение w степени m, удовлетворяющей условиям*

$$f(m) < a_r + l\mathfrak{C}(m),\ \ a_j = a_r - \delta(m - \rho), \tag{36}$$

уравнения (35) *будет решением уравнения* (7) *или имеет структуру*

$$w = \varepsilon_t J^{\rho}\gamma(z) + \mathfrak{J}(z),\ t = \overline{1, \delta}\,, \tag{37}$$

где J^{ρ} — оператор такой, что

$$J^{\rho}z^k = \frac{z^{k+\rho}}{(k+1)_{\rho}},$$

$(k+1)_{\rho}$ есть символ Похгаммера, $\mathfrak{J}$ — некоторый полином степени $\mathfrak{s}$, определяемой соотношением

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{f} + \rho,\ \ \textit{при}\ \ \mathfrak{f} \geqslant 0,\ \ \mathfrak{s} \leqslant \rho - 1\ \ \textit{при}\ \ \mathfrak{f} < 0, \tag{38}$$

число $\mathfrak{f}$ находится по формуле

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{A}(m) - a_j - l\mathfrak{C}(m) - (\delta - 1)\gamma. \tag{39}$$

Полином w, являющийся решением уравнения (7), *будет решением уравнения* (35), *если и только если выполняется тождество* (10).

Если $\mathfrak{f} < 0$, то полином w вида (37), *где $\mathfrak{J}(z)$ — некоторый полином степени $\mathfrak{s} \leqslant \rho - 1$, будет решением дифференциального уравнения* (35) *тогда и только тогда, когда имеет место тождество* (11).

[1] Уравнение (35) является частным случаем уравнения (25).

Пример 5. Уравнение

$$w'' - (z+2)w' + ww' + (w')^s w^k\big(- (z+2)^4 + w^4\big) = 0 \qquad (40)$$

при целых неотрицательных числах s и k принадлежит классу (35), где

$$A_r\colon z \to \ -(z+2)^4, \ \ A_j\colon z \to 1, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ l = 1, \ \rho = 0, \ \delta = 4.$$

На основании леммы 1.2.1.1 устанавливаем, что уравнение (40) может иметь полиномиальные решения только первой степени.

Поскольку

$$f(1) = 1, \ a_r = 4, \ a_j = 0, \ \mathfrak{C}(1) = k,$$

то можно использовать теорему 5 при $\mathfrak{f} \leqslant \ -(k+2),$ так как

$$\gamma\colon z \to z+2, \ Q\colon z \to 0, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ \mathfrak{A}(1) \leqslant \ 1.$$

Уравнение (7) имеет вид

$$w^k (w')^s = 0.$$

У него нет полиномиальных решений степени $m = 1.$

Структура (37) для уравнения (40) имеет вид

$$w\colon z \to \varepsilon_t(z+2), \ \forall z \in \mathbb{C}, \ t = \overline{1,4}\,. \qquad (41)$$

Тождества (11) имеют место для (41) лишь при $\varepsilon_t = 1,$ а значит,

$$w\colon z \to z+2, \ \forall z \in \mathbb{C},$$

является единственным нетривиальным полиномиальным решением уравнения (40).

Если

$$\mathfrak{C}\big(z, w, w', \ldots, w^{(\gamma)}\big) = w^{(\rho)},$$

то уравнение (35) может быть записано в виде

$$\mathfrak{B}\big(z, w, w', \ldots, w^{(\beta)}\big) + A_r(z)\big(w^{(\rho)}\big)^l + A_j(z)\big(w^{(\rho)}\big)^{l+\delta} = 0. \quad (42)$$

Как следствие теоремы 5 справедлива

Теорема 6. *Полиномиальные решения* w *степени* m *такой, что*

$$f(m) < a_r + l(m-\rho), \ \ a_j = a_r - \delta(m-\rho), \tag{43}$$

алгебраического дифференциального уравнения (42) *имеют структуру* (37), *где* $\mathfrak{J}$ — *некоторый полином степени* $\mathfrak{f}$, *опредляемой соотношением* (38), *число* $\mathfrak{f}$ *находится по формуле*

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{A}(\rho+\gamma) - a_j - (l+\delta-1)\gamma. \tag{44}$$

Если $\mathfrak{f} < 0$, *то полином* w *вида* (37), *где* $\mathfrak{J}$ — *некоторый полином степени* $\mathfrak{s} \leqslant \rho - 1$, *будет решением дифференциального уравнения* (42) *тогда и только тогда, когда имеет место тождество* (11).

Пример 6. Группировкой членов уравнение (24) приводим к виду

$$\begin{gathered} -2zw^3w''' + zw^4w'' - (w')^3 + 3w^2(w')^2 - \\ -3w^4w' + w + 64z^9 - z^4 - z^{12}w^3 + w^6 = 0, \end{gathered} \tag{24B}$$

соответствующему (42) при

$$A_r\colon z \to -z^{12}, \ A_j\colon z \to 1, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ l = 1, \ \rho = 0, \ \delta = 3.$$

Поскольку $f(4) \leqslant 19$, $a_r = 12$, $a_j = 0$, то для уравнения (24B) при $m = 4$ выполняется соотношение (43), а значит, можно использовать теорему 6.

По формуле (44) находим, что $\mathfrak{f} \leqslant -1$, так как

$$\gamma\colon z \to z^4, \ Q\colon z \to 0, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ \mathfrak{A}(4) = f(4) \leqslant 19.$$

Структура (37) имеет вид

$$w\colon z \to \varepsilon_t z^4, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ t = \overline{1,3}\,. \tag{45}$$

Поскольку тождество (11), построенное на основании уравнения (24B), выполняется при $\varepsilon_t = 1$ в (45), то $w\colon z \to z^4$, $\forall z \in \mathbb{C}$, является единственным полиномиальным решением уравнения (24).

§ 2. Максимальное число полиномиальных решений определённой структуры

Пусть полиномы w_t имеют структуру

$$w_t\colon z \to \varepsilon_t \gamma(z),\ \forall z \in \mathbb{C},\ t = \overline{1, \delta}\,, \tag{1}$$

где γ — полином комплексного переменного z, ε_t — корни уравнения $\varepsilon^\delta = 1,$ удовлетворяющие соотношению (6.0.0), δ — натуральное число.

Укажем необходимые и достаточные условия того, чтобы все полиномы семейства (1) были решениями уравнения (1.1.1.1). С этой целью члены уравнения (1.1.1.1) в зависимости от их размерности расположим так, что

$$\begin{gathered}
\varkappa_0 = \varkappa_{p_0} + \xi_{p_0}\delta,\ p_0 = \overline{0, \lambda_1}\,,\ 0 \leqslant \lambda_1 \leqslant N, \\
\varkappa_{\lambda_1+1} = \varkappa_{p_1} + \xi_{p_1}\delta,\ p_1 = \overline{\lambda_1 + 1, \lambda_2}\,,\ \lambda_1 + 1 \leqslant \lambda_2 \leqslant N, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\varkappa_{\lambda_{h-1}+1} = \varkappa_{p_{h-1}} + \xi_{p_{h-1}}\delta,\ p_{h-1} = \overline{\lambda_{h-1} + 1,\ \lambda_h}\,,\ \lambda_h = N,
\end{gathered} \tag{2}$$

где ξ_{p_j} $(j = \overline{0, h-1}\,)$ — целые числа, $h \leqslant \delta.$

Все полиномы семейства (1) являются решениями уравнения (1.1.1.1) (при расположении в нём членов по правилу (2)) тогда и только тогда, когда имеет место система тождеств

$$\sum_{\alpha=1}^{h} \varepsilon_t^{\varkappa_{\lambda_\alpha}} \sum_{\tau=\lambda_{\alpha-1}+1}^{\lambda_\alpha} B_{\mu_\tau}(z) \prod_{k=1}^{s_\tau} \Bigl(\gamma^{\left(l_{k_\tau}\right)}(z)\Bigr)^{\nu_{k_\tau}} \equiv 0,\ t = \overline{1, \delta}\,, \tag{3}$$

где $\lambda_0 = \,-1.$

Умножим каждое из тождеств (3) на $\varepsilon^{-\mu t}$, $t=\overline{1,\delta}$, соответственно. В результате последующего суммирования получим

$$\sum_{\alpha=1}^{h}\left(\sum_{t=1}^{\delta}\varepsilon^{\left(\varkappa_{\lambda_\alpha}-\mu\right)t}\right)\sum_{\tau=\lambda_{\alpha-1}+1}^{\lambda_\alpha}B_{\mu_\tau}(z)\prod_{k=1}^{s_\tau}\left(\gamma^{\left(l_{k_\tau}\right)}(z)\right)^{\nu_{k_\tau}}\equiv 0. \quad (4)$$

Пусть $\mu=\varkappa_{\lambda_1}$. Тогда в силу леммы 2.0.0 суммы

$$\sum_{t=1}^{\delta}\varepsilon^{\left(\varkappa_{\lambda_\alpha}-\varkappa_{\lambda_1}\right)t}=0,\ \ \alpha=\overline{2,h}\,,$$

и непосредственно из тождества (4) имеем

$$\sum_{\tau=0}^{\lambda_1}B_{\mu_\tau}(z)\prod_{k=1}^{s_\tau}\left(\gamma^{\left(l_{k_\tau}\right)}(z)\right)^{\nu_{k_\tau}}\equiv 0.$$

Последовательно полагая $\mu=\varkappa_{\lambda_j}$, $j=\overline{2,h}$, всякий раз будем получать тождества, аналогичные последнему.

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Для того чтобы все полиномы семейства* (1) *были решениями уравнения* (1.1.1.1), *необходимо и достаточно, чтобы полином* γ *был решением системы уравнений*

$$\sum_{\tau=\lambda_{\alpha-1}+1}^{\lambda_\alpha}B_{\mu_\tau}(z)\prod_{k=1}^{s_\tau}\left(w^{\left(l_{k_\tau}\right)}\right)^{\nu_{k_\tau}}=0,\ \alpha=\overline{1,h}\,, \quad (5)$$

где λ_α *и* h *определяются из* (2).

Заметим, что достаточность утверждения теоремы в силу представления (3) является вполне очевидным фактом.

Рассмотрим уравнение[1]

[1]Частный вид уравнения (6), исследованный в [77; 128].

$$\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z) \prod_{k=1}^{s_i} \left(w^{(l_{k_i})}\right)^{\nu_{k_i}} = \sum_{l=0}^{n} B_{\mu_l}(z) \left(w^{(\rho)}\right)^{\nu_l}, \qquad (6)$$

где A_{r_i} и B_{μ_l} — полиномы комплексного переменного z; l_{k_i}, ν_{k_i}, ρ и ν_l — целые неотрицательные числа и

$$0 \leqslant \nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_n,\ \nu_n \geqslant 2.$$

Решения уравнения (6) будем искать в виде[1]

$$w_t \colon z \to \varepsilon_t J^{\rho} S(z),\ \forall z \in \mathbb{C},\ t = \overline{1, \delta}\,, \qquad (7)$$

где полином

$$S(z) = \left[\left(-\frac{B_{\mu_r}(z)}{B_{\mu_j}(z)}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right] \qquad (8)$$

при $\delta = \nu_j - \nu_r, r \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j > r$.

Полином Q определим по правилу (2.0.0) из тождества

$$B_{\mu_r}(z) = -B_{\mu_j}(z) S^{\delta}(z) - Q(z),\ \forall z \in \mathbb{C}. \qquad (9)$$

Кроме того, предположим, что размерности членов, расположенных в левой части равенства (6), связаны соотношениями[2]

$$\varkappa_i = \varkappa_0 + \theta_i \delta,\ i = \overline{0, H}\,, \qquad (10)$$

где θ_i — целые числа, т.е. разность размерностей кратна δ.

Все полиномы семейства (7) являются решениями уравнения (6) тогда и только тогда, когда они обращают это уравнение в тождества, которые в силу (9) и (10) имеют вид

[1] Вид (7) обоснован теоремами 5.0.1 и 6.0.1.

[2] В [77; 128] для частных видов (6) требуется более сильное условие, чтобы $\theta_0 = \theta_1 = \ldots = \theta_H = 0$.

$$\varepsilon_t^{\varkappa_0} \sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z) \prod_{k=1}^{s_i} \Bigl(\bigl(J^\rho S(z)\bigr)^{(l_{k_i})} \Bigr)^{\nu_{k_i}} \equiv$$
$$\equiv \sum_{\substack{l\,=\,0,\\ l\,\neq\, r,\,j}}^{n} \varepsilon_t^{\nu_l} B_{\mu_l}(z) S^{\nu_l}(z) - \varepsilon_t^{\nu_r} Q(z) S^{\nu_r}(z), \ \ t = \overline{1,\delta}\,. \tag{11}$$

Умножим каждое из тождеств (11) на $\varepsilon^{-\mu t}$, $t = \overline{1,\delta}$, соответственно. В результате последующего суммирования получаем

$$\Bigl(\sum_{t=1}^{\delta} \varepsilon^{(\varkappa_0-\mu)t}\Bigr)\Bigl(\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z) \prod_{k=1}^{s_i} \Bigl(\bigl(J^\rho S(z)\bigr)^{(l_{k_i})} \Bigr)^{\nu_{k_i}}\Bigr) \equiv$$
$$\equiv \sum_{\substack{l\,=\,0,\\ l\,\neq\, r,\,j}}^{n} \Bigl(\sum_{t=1}^{\delta} \varepsilon^{(\nu_l-\mu)t}\Bigr) B_{\mu_l}(z) S^{\nu_l}(z) - \Bigl(\sum_{t=1}^{\delta} \varepsilon^{(\nu_l-\mu)t}\Bigr) Q(z) S^{\nu_r}(z). \tag{12}$$

Рассмотрим в отдельности три логические возможности:

1) $\varkappa_0 = \nu_{\tau_\lambda} + \xi_{\tau_\lambda}\delta,\ \tau_\lambda \in \{0,1,\ldots,n\},\ \tau_\lambda \neq r,\ \tau_\lambda \neq j,$ $\lambda = \overline{1,\beta}\,,\ \ 1 \leqslant \beta \leqslant n-2;$

2) $\varkappa_0 = \nu_r + \xi_r\delta;$

3) $\varkappa_0 \neq \nu_l + \xi_l\delta,\ l = \overline{0,n}\,,$

где $\xi_{\tau_\lambda},\ \xi_r,\ \xi_l$ — целые числа.

Пусть

$$\varkappa_0 = \nu_{\tau_\lambda} + \xi_{\tau_\lambda}\delta,\ \tau_\lambda \in \{0,1,\ldots,n\},\ \tau_\lambda \neq r,\ \tau_r \neq j,$$
$$\lambda = \overline{1,\beta}\,,\ 1 \leqslant \beta \leqslant n-2,\ \xi_{\tau_\lambda} \in \mathbb{Z}.$$

Следуя правилу составления системы дифференциальных уравнений (5), будем последовательно полагать: $\mu = \varkappa_0$; $\mu = \nu_l$, $l = \overline{0,n}\,,\ l \neq r,\ l \neq j,\ l \neq \nu_{\tau_\lambda},\ \lambda = \overline{1,\beta}\,;\ \mu = \nu_r.$

Пусть $\mu = \varkappa_0$. Потребуем, чтобы

$$\sum_{t=1}^{\delta} \varepsilon^{(\nu_l - \varkappa_0)t} = 0, \quad \sum_{t=1}^{\delta} \varepsilon^{(\nu_r - \varkappa_0)t} = 0,$$

где $l = \overline{0,n}\,,\ l \ne r,\ l \ne j,\ l \ne \tau_\lambda,\ \lambda = \overline{1,\beta},\ 1 \leqslant \beta \leqslant n-2,$ то есть, в силу леммы 2.0.0, чтобы

$$\begin{gathered} \varkappa_0 \ne \nu_p + \theta\delta,\ p = \overline{0,n}\,,\ p \ne j,\ p \ne \tau_\lambda, \\ \lambda = \overline{1,\beta}\,,\ 1 \leqslant \beta \leqslant n-2, \end{gathered} \tag{13}$$

где θ — целое, отличное от нуля число.

Тогда из тождества (12) получаем

$$\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z) \prod_{k=1}^{s_i} \Bigl(\bigl(J^\rho S(z)\bigr)^{(l_{k_i})} \Bigr)^{\nu_{k_i}} \equiv \sum_{\lambda=1}^{\beta} B_{\mu_{\tau_\lambda}}(z) S^{\nu_{\tau_\lambda}}(z). \tag{14}$$

Положим

$$\mu = \nu_l,\ l = \overline{0,n}\,,\ l \ne r,\ l \ne j,\ l \ne \tau_\lambda,\ \lambda = \overline{1,\beta}\,,\ 1 \leqslant \beta \leqslant n-2,$$

и потребуем, чтобы

$$\sum_{t=1}^{\delta} \varepsilon^{(\varkappa_0 - \nu_l)t} = 0, \quad \sum_{t=1}^{\delta} \varepsilon^{(\nu_h - \nu_l)t} = 0, \quad \sum_{t=1}^{\delta} \varepsilon^{(\nu_r - \nu_l)t} = 0,$$

где $l = \overline{0,n}\,,\ l \ne r, l \ne j,\ l \ne \tau_\lambda,\ h = \overline{0,n}\,,\ h \ne r,\ h \ne j,$ $h \ne \tau_\lambda,\ h \ne l,\ \lambda = \overline{1,\beta}\,,\ 1 \leqslant \beta \leqslant n-2,$ то есть, в силу леммы 2.0.0, чтобы

$$\begin{gathered} \varkappa_0 \ne \nu_l + \theta_1\delta,\ \nu_h - \nu_l \ne \theta_2\delta,\ \nu_r - \nu_l \ne \theta_3\delta,\ l = \overline{0,n}\,, \\ l \notin \{r, j, \tau_\lambda\},\ h = \overline{0,n}\,,\ h \notin \{r, j, \tau_\lambda, l\},\ \lambda = \overline{1,\beta}\,,\ 1 \leqslant \beta \leqslant n-2, \end{gathered} \tag{15}$$

где $\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3$ — целые, отличные от нуля числа.

Тогда из тождества (12) получаем

$$B_{\mu_l}(z)\equiv 0,\ l=\overline{0,n}\,,\ l\neq r,\ l\neq j,\ l\neq \tau_\lambda,$$

$$\lambda=\overline{1,\beta}\,,\ 1\leqslant\beta\leqslant n-2.$$

Положим $\mu=\nu_r$ и потребуем, чтобы

$$\sum_{t=1}^{\delta}\varepsilon^{(\varkappa_0-\nu_r)t}=0,\quad \sum_{t=1}^{\delta}\varepsilon^{(\nu_l-\nu_r)t}=0,$$

где $l=\overline{0,n}\,,\ l\neq r,\ l\neq j,\ l\neq\tau_\lambda,\ \lambda=\overline{1,\beta}\,,\ 1\leqslant\beta\leqslant n-2,$ то есть, в силу леммы 2.0.0, чтобы

$$\begin{gathered}\varkappa_0\neq\nu_r+\theta_1\delta,\ \nu_l-\nu_r\neq\theta_2\delta,\\ l=\overline{0,n}\,,\ l\neq r,\ l\neq j,\ l\neq\tau_\lambda,\ \lambda=\overline{1,\beta}\,,\ 1\leqslant\beta\leqslant n-2,\end{gathered}\tag{16}$$

где $\theta_1,\ \theta_2$ — целые, отличные от нуля числа.

Тогда из тождества (12) получаем, что $Q(z)\equiv 0$.

Объединим соотношения (13), (15) и (16):

$$\begin{gathered}\varkappa_0=\nu_{\tau_\lambda}+\xi_{\tau_\lambda}\delta,\ \varkappa_0\neq\nu_p+\theta_1\delta,\ \nu_h-\nu_l\neq\theta_2\delta,\ \delta=\nu_j-\nu_r,\\ \tau_\lambda\in\{0,1,\ldots,n\},\ \tau_\lambda\neq r,\ \tau_\lambda\neq j,\ \lambda=\overline{1,\beta}\,,\ 1\leqslant\beta\leqslant n-2,\\ l=\overline{0,n}\,,\ l\neq r,\ l\neq j,\ l\neq\tau_\lambda,\ h=\overline{0,n}\,,\ h\neq j,\ h\neq l,\\ h\neq\tau_\lambda,\ p=\overline{0,n}\,,\ p\neq j,\ p\neq\tau_\lambda,\end{gathered}\tag{17}$$

где $\theta_1,\ \theta_2,\ \xi_{\tau_\lambda}$ — целые числа.

Таким образом, доказана

Теорема 2. *Для того чтобы все полиномы семейства* (7) *являлись решениями уравнения* (6), *достаточно, а при ограничениях* (17) *и необходимо, чтобы уравнение* (6) *имело вид*

$$\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z) \prod_{k=1}^{s_i} \left(w^{(l_{k_i})}\right)^{\nu_{k_i}} = \sum_{\lambda=1}^{\beta} B_{\mu_{\tau_\lambda}}(z) \left(w^{(\rho)}\right)^{\nu_{\tau_\lambda}} + $$
$$ + B_{\mu_r}(z)\left(w^{(\rho)}\right)^{\nu_r} + B_{\mu_j}(z)\left(w^{(\rho)}\right)^{\nu_j}, \tag{18}$$

где полиномы B_{μ_r} *и* B_{μ_j} *связаны тождеством*

$$B_{\mu_r}(z) = -B_{\mu_j}(z) S^{\delta}(z), \ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{19}$$

в котором полином S *такой, что* $J^{\rho} S$ *является решением дифференциального уравнения*

$$\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z) \prod_{k=1}^{s_i} \left(w^{(l_{k_i})}\right)^{\nu_{k_i}} = \sum_{\lambda=1}^{\beta} B_{\mu_{\tau_\lambda}}(z) \left(w^{(\rho)}\right)^{\nu_{\tau_\lambda}}. \tag{20}$$

Достаточные условия теоремы 2 не требуют выполнения ограничений (17).

Действительно, то, что выполняется соотношение (19), означает,что полиномы (7) являются решениями уравнения

$$B_{\mu_r}(z)\left(w^{(\rho)}\right)^{\nu_r} + B_{\mu_j}(z)\left(w^{(\rho)}\right)^{\nu_j} = 0. \tag{21}$$

Из (20) следует тождество (14), умножив которое на $\varepsilon_t^{\varkappa_0}$, получим, что полиномы (7) — решения уравнения (20).

Сложив равенства (20) и (21), получим, что все полиномы семейства (7) являются решениями уравнения (18).

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$z^2 w w'' - w^4 (w')^4 + z^6 (w')^2 = z^4 w + 2w^2 - w^3 + 4w^4 - 16 w^6, \tag{22}$$

которое принадлежит классу уравнений (18), где $\rho = 0,\ \nu_r = 1,\ \nu_j = 3$.

При этом

$$\delta = 2,\ S\colon z \to z^2,\ Q\colon z \to 0,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \varkappa_0 = 2.$$

Полиномы

$$B_{\mu_r}\colon z \to z^4,\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{и} \quad B_{\mu_j}\colon z \to \,-1,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

связаны тождеством (19).

Уравнение (20) в данном случае имеет вид

$$z^2 w w'' - w^4 (w')^4 + z^6 (w')^2 = 2w^2 + 4w^4 - 16w^6,$$

решением которого является полином $w\colon z \to z^2,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

В силу теоремы 2 полиномы

$$w_1\colon z \to z^2,\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{и} \quad w_2\colon z \to \,-z^2,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

являются решениями уравнения (22).

Пусть $\varkappa_0 = \nu_r + \xi_r \delta$, где ξ_r — целое число.

Следуя правилу составления системы дифференциальных уравнений (5), будем последовательно полагать, что

$$\mu = \varkappa_0;\ \ \mu = \nu_l,\ l = \overline{0, n}\,,\ l \neq r,\ l \neq j.$$

На основании рассуждений, аналогичных приведённым при доказательстве теоремы 2, заключаем, что имеет место

Теорема 3. *Для того чтобы все полиномы семейства* (7) *являлись решениями уравнения* (6), *достаточно, а при ограничениях*

$$\varkappa_0 = \nu_r + \xi_r \delta,\ \varkappa_0 \neq \nu_l + \theta_1 \delta,\ \nu_h - \nu_l \neq \theta_2 \delta,\ \delta = \nu_j - \nu_r,$$

$$l, h = \overline{0, n}\,,\ l \neq r,\ l \neq j,\ h \neq j,\ h \neq l, \xi_r \in \mathbb{Z},\ \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{Z} \backslash \{0\},$$

и необходимо, чтобы это уравнение имело вид

$$\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z) \prod_{k=1}^{s_i} \left(w^{(l_{k_i})}\right)^{\nu_{k_i}} = \tag{23}$$

$$= B_{\mu_r}(z) \left(w^{(\rho)}\right)^{\nu_r} + B_{\mu_j}(z) \left(w^{(\rho)}\right)^{\nu_j},$$

где полиномы B_{μ_r} *и* B_{μ_j} *связаны тождеством* (9), *в кото-*

ром полином S такой, что $J^{\rho}S$ является решением дифференциального уравнения

$$\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z) \prod_{k=1}^{s_i} \left(w^{(l_{k_i})}\right)^{\nu_{k_i}} = -Q(z)\left(w^{(\rho)}\right)^{\nu_r}. \tag{24}$$

Пример 2. Уравнение

$$\begin{gathered} 2w(w'')^5 - zw'' - 60w = 2(32z^5 + 80z^4 + 80z^3 + \\ + 40z^2 + 11z + 1)w' - 2(w')^6 \end{gathered} \tag{25}$$

принадлежит классу уравнений (23), где $\rho = 1,\ \nu_r = 1,\ \nu_j = 6.$

При этом

$$\delta = 5,\ S\colon z \to 2z + 1,\ Q\colon z \to -2z,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \varkappa_0 = 6.$$

Полиномы

$$B_{\mu_r}\colon z \to 2(32z^5 + 80z^4 + 80z^3 + 40z^2 + 11z + 1),\ \forall z \in \mathbb{C},$$

и

$$B_{\mu_j}\colon z \to -2,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

связаны тождеством (9).

Уравнение (24) в данном случае имеет вид

$$2w(w'')^5 - zw'' - 60w = 2zw',$$

решением которого является полином $w\colon z \to z(z+1),\ \forall z \in \mathbb{C}.$

В силу теоремы 3 полиномы

$$w_t\colon z \to \varepsilon_t z(z+1),\ \forall z \in \mathbb{C},\ t = \overline{1,5}\,,$$

являются решениями уравнения (25).

Пусть $\varkappa_0 \neq \nu_l + \xi_l\delta,\ l = \overline{0,n}$, где ξ_l — целое число.

Следуя правилу составления системы (5), будем последовательно полагать, что

$$\mu = \varkappa_0;\ \mu = \nu_l,\ l = \overline{0,n}\,,\ l \neq r,\ l \neq j;\ \mu = \nu_r.$$

Затем, на основании рассуждений, аналогичных приведённым при доказательстве теоремы 2, устанавливаем, что имеет место

Теорема 4. *Для того чтобы все полиномы семейства* (7) *являлись решениями дифференциального уравнения* (6), *достаточно, а при условиях*

$$\varkappa_0 \neq \nu_l + \xi_l \delta,\ \nu_p - \nu_h \neq \theta\delta,\ l, h, p = \overline{0, n}\,,\ h \neq r,\ h \neq j,$$

$$p \neq j,\ p \neq h,\ \delta = \nu_j - \nu_r,\ \xi_l \in \mathbb{Z},\ \theta \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

и необходимо, чтобы это уравнение имело вид (23), *где полиномы* B_{μ_r} *и* B_{μ_j} *связаны тождеством* (19), *в котором полином* S *такой, что* $J^\rho S$ *является решением уравнения*

$$\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z) \prod_{k=1}^{s_i} \left(w^{(l_{k_i})}\right)^{\nu_{k_i}} = 0. \tag{26}$$

Пример 3. Уравнение

$$w''(w')^2 w - z^3 w'' w' - z^6 (w''')^2 = 36 z^9 w'' - z^7 (w'')^3 \tag{27}$$

принадлежит классу уравнений (23), где $\rho = 2,\ \nu_r = 1, \nu_j = 3$.

При этом

$$\delta = 2,\ S\colon z \to 6z,\ Q\colon z \to 0,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \varkappa_0 = 4.$$

Полиномы

$$B_{\mu_r}: z \to 36 z^9,\ \ B_{\mu_j}: z \to\ - z^7,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

связаны тождеством (19).

Уравнение (26) в данном случае имеет вид

$$w''(w')^2 w - z^3 w'' w' - z^6 (w''')^2 = 0,$$

решением которого является полином $w\colon z \to z^3,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

В силу теоремы 4 полиномы

$$w\colon z \to z^3,\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{и} \quad w\colon z \to\ - z^3,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

являются решениями уравнения (27).

Пусть полиномы w_t имеют структуру

$$w_t\colon z \to \varepsilon_t\gamma(z) + \mathfrak{J}(z), \forall z \in \mathbb{C},\ t = \overline{1, \delta}\,, \tag{28}$$

где $\gamma, \mathfrak{J}$ — полиномы комплексного переменного z, ε_t — корни уравнения $\varepsilon^\delta = 1$, удовлетворяющие соотношениям (6.0.0), δ — натуральное число.

Укажем необходимые и достаточные условия, когда все полиномы семейства (28) будут решениями уравнения (1.1.1.1).

Все полиномы семейства (28) будут решениями уравнения (1.1.1.1) тогда и только тогда, когда при всех $t = \overline{1, \delta}$ имеют место тождества

$$\sum_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(z) \prod_{k=1}^{s_i} \Biggl(\sum_{j_k=0}^{\nu_{k_i}} \binom{\nu_{k_i}}{j_k} \Bigl(\mathfrak{J}^{(l_{k_i})}(z) \Bigr)^{\nu_{k_i} - j_k} \Bigl(\varepsilon_t \gamma^{(l_{k_i})}(z) \Bigr)^{j_k} \Biggr) \equiv 0,$$

которые элементарными преобразованиями приводим к виду

$$\sum_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(z) \sum_{j_1=0}^{\nu_{1_i}} \sum_{j_2=0}^{\nu_{2_i}} \ldots \sum_{j_{s_i}=0}^{\nu_{s_{i_i}}} \varepsilon^{j_1+j_2+\ldots+j_{s_i}} \prod_{k=1}^{s_i} \binom{\nu_{k_i}}{j_k} \cdot$$
$$\cdot \Bigl(\mathfrak{J}^{(l_{k_i})}(z) \Bigr)^{\nu_{k_i} - j_k} \Bigl(\gamma^{(l_{k_i})}(z) \Bigr)^{j_k} \equiv 0,\ t = \overline{1, \delta}\,. \tag{29}$$

Перегруппируем тождества (29) с учётом того, что члены каждого из этих тождеств связаны одним из условий

$$\sum_{k=1}^{s_i} j_k = \theta\delta,\quad \sum_{k=1}^{s_i} j_k = 1 + \theta\delta,\quad \ldots\,,\quad \sum_{k=1}^{s_i} j_k = (\delta - 1) + \theta\delta, \tag{30}$$

где θ — целое неотрицательное число.

Тогда тождества (29) будут иметь вид

$$\sum_{\lambda=0}^{\delta-1} \varepsilon_t^{\lambda} \sum_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(z) \sum_{\tau_1=0}^{\gamma_1(\lambda)} \sum_{\tau_2=0}^{\gamma_2(\lambda)} \cdots \sum_{\tau_{s_i}=0}^{\gamma_{s_i}(\lambda)} \prod_{k=1}^{s_i} \binom{\nu_{k_i}}{{}_\lambda\chi_{k_{\tau_k}}} \cdot$$
$$\cdot \left(\mathfrak{J}^{(l_{k_i})}(z)\right)^{\nu_{k_i} - {}_\lambda\chi_{k_{\tau_k}}} \left(\gamma^{(l_{k_i})}(z)\right)^{{}_\lambda\chi_{k_{\tau_k}}} \equiv 0, \ t = \overline{1, \delta}, \qquad (31)$$

где через ${}_\lambda\chi_{k_{\tau_k}}$ обозначены те $j_k \in \{0, 1, \dots \nu_{k_i}\}$, для которых $\sum\limits_{k=1}^{s_i} j_k = \lambda + \theta\delta$, числа $\gamma_k(\lambda) \in \{0, 1, \dots, \nu_{k_i}\}$ и определяются в зависимости от группировки по (30).

Умножив каждое из тождеств (31) на $\varepsilon^{-\mu t}$, $t = \overline{1, \delta}$, соответственно, с учётом (6.0.0) и выполнив почленное сложение, получим

$$\sum_{\lambda=0}^{\delta-1} \left(\sum_{t=1}^{\delta} \varepsilon^{(\lambda-\mu)t}\right) \sum_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(z) \sum_{\tau_1=0}^{\gamma_1(\lambda)} \sum_{\tau_2=0}^{\gamma_2(\lambda)} \cdots \sum_{\tau_{s_i}=0}^{\gamma_{s_i}(\lambda)} \prod_{k=1}^{s_i} \binom{\nu_{k_i}}{\lambda\chi k_{\tau_k}} \cdot$$
$$\cdot \left(\mathfrak{J}^{(l_{k_i})}(z)\right)^{\nu_{k_i} - \lambda\chi k_{\tau_k}} \left(\gamma^{(l_{k_i})}(z)\right)^{{}_\lambda\chi_{k_{\tau_k}}} \equiv 0, \qquad (32)$$

Пусть $\mu = 0$. Тогда на основании леммы 2.0.0

$$\sum_{t=1}^{\delta} \varepsilon^{\lambda t} = 0, \quad \lambda = \overline{1, \delta - 1}\,.$$

Непосредственно из тождества (32) получаем, что

$$\sum_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(z) \sum_{\tau_1=0}^{\gamma_1(0)} \sum_{\tau_2=0}^{\gamma_2(0)} \cdots \sum_{\tau_{s_i}=0}^{\gamma_{s_i}(0)} \prod_{k=1}^{s_i} \binom{\nu_{k_i}}{{}_0\chi_{k_{\tau_k}}} \cdot$$

$$\cdot\Big(\mathfrak{J}^{(l_{k_i})}(z)\Big)^{\nu_{k_i}-{}_0\chi_{k_{\tau_k}}}\Big(\gamma^{(l_{k_i})}(z)\Big)^{{}_0\chi_{k_{\tau_k}}}\equiv 0.$$

Полагая $\mu=1,\ \mu=2,\ldots,\mu=\delta-1,$ будем получать тождества, аналогичные последнему при $\lambda=1,\ \lambda=2,\ \ldots,\ \lambda=\delta-1,$ соответственно.

Тем самым доказана

Теорема 5. *Для того чтобы все полиномы семейства* (28) *являлись решениями уравнения* (1.1.1.1), *необходимо и достаточно выполнения системы тождеств*

$$\sum_{i=0}^{N}B_{\mu_i}(z)\sum_{\tau_1=0}^{\gamma_1(\lambda)}\sum_{\tau_2=0}^{\gamma_2(\lambda)}\cdots\sum_{\tau_{s_i}=0}^{\gamma_{s_i}(\lambda)}\prod_{k=1}^{s_i}\binom{\nu_{k_i}}{{}_\lambda\chi_{k_{\tau_k}}}\cdot$$

$$\cdot\Big(\mathfrak{J}^{(l_{k_i})}(z)\Big)^{\nu_{k_i}-{}_\lambda\chi_{k_{\tau_k}}}\Big(\gamma^{(l_{k_i})}(z)\Big)^{{}_\lambda\chi_{k_{\tau_k}}}\equiv 0,\ \lambda=\overline{0,\delta-1}\,, \tag{33}$$

где числа $\gamma_k(\lambda)$ *и* ${}_\lambda\chi_{k_{\tau_k}}$ *определяются в зависимости от группировки по* λ *на основании* (30), *как это показано в тождествах* (31).

Заметим, что достаточность утверждения теоремы 5 в силу представления (31) является вполне очевидным фактом.

Теорема 5 носит общий характер, однако представления (33) весьма грамоздки. В частнных же случаях данная сложность упрощается и чётко прослеживается эффективность теоремы.

Рассмотрим уравнение[1]

$$\sum_{i=0}^{H}A_{r_i}(z)w^{(s_i)}+\sum_{l=0}^{n}B_{\mu_l}(z)\big(w^{(\rho)}\big)^{\nu_l}=0, \tag{34}$$

где A_{r_i} и B_{μ_l} — полиномы комплексного переменного z; $s_i,\ \mu_l,$ $r_i,\ \rho$ — целые неотрицательные числа и

[1] Частные виды уравнения (34) исследованы в [78; 88].

$$0 \leqslant s_0 < s_1 < \ldots < s_H, \ s_i \neq \rho, \ i = \overline{0, H}\,.$$

Пусть решения уравнения (34) имеют структуру[1]

$$w_t \colon z \to \varepsilon_t J^\rho S(z) + \mathfrak{J}(z), \ \forall z \in \mathbb{C}, \ t = \overline{1, \delta}\,, \tag{35}$$

где S — полином, определяемый из соотношения (8), $\mathfrak{J}$ — полином степени $\deg \mathfrak{J} = \mathfrak{f} < \rho$.

Полином Q определяется по правилу (2.0.0) из равенства (9).

Во множестве $\{0, 1, \ldots, \delta - 1\}$ всегда содержится число p такое, что

$$\nu_r = p + \theta\delta, \tag{36}$$

где θ — целое число. В соответствии с

$$0 \leqslant q_0 < q_1 < \ldots < q_H \leqslant \delta - 1$$

показатели степени ν_l, $l = \overline{0, n}$, $l \neq r$, $l \neq j$, расположим так, чтобы

$$\begin{gathered} \nu_{l_\eta + \tau} = q_\eta + \xi_{l_\eta + \tau}\delta, \ \tau = \overline{0, \zeta_\eta}, \ \zeta_\eta \geqslant 0, \ \eta = \overline{0, h}\,, \\ \sum_{\eta=0}^{h} (\zeta_\eta + 1) = n - 1, \end{gathered} \tag{37}$$

где $\xi_{l_\eta + \tau}$ — целые числа.

Тогда множество

$$\{\nu_{l_0}, \nu_{l_0+1}, \ldots \nu_{l_0+\zeta_0}, \nu_{l_1}, \nu_{l_1+1}, \ldots, \nu_{l_1+\zeta_1}, \ldots, \nu_{l_h}, \nu_{l_h+1}, \ldots, \nu_{l_h+\zeta_h}\}$$

является перестановкой множества $\{\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_n\} \backslash \{\nu_r, \nu_j\}$ такой, что если $\nu_\lambda = q_k + \xi_\lambda \delta$, то либо $\nu_{\lambda+1} = q_k + \xi_{\lambda+1}\delta$, либо $\nu_{\lambda+1} = q_{k+1} + \xi_{k+1}\delta$ при $q_k < q_{k+1}$, для любого λ из множества $\{0, 1, \ldots, n\} \backslash \{r, j\}$.

[1] Структура (35) обоснована теоремой 6.

Все полиномы семейства (35) будут решениями уравнения (34) тогда и только тогда, когда они обращают это уравнение в тождества, которые в силу (9), (36) и (37) будут иметь вид

$$\varepsilon_t \sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z)\bigl(J^{\rho} S(z)\bigr)^{(s_i)} + \sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z)\mathfrak{J}^{(s_i)}(z) +$$
$$+ \sum_{\eta=0}^{h} \varepsilon_t^{q_h} \sum_{\tau=0}^{\zeta_\eta} B_{\mu_{l_\eta+\tau}}(z) S^{\nu_{l_\eta+\tau}}(z) - \varepsilon_t^{p} Q(z) S^{\nu_r}(z) \equiv 0,\ t = \overline{1,\delta}\,. \tag{38}$$

Умножим каждое из тождеств (38) на $\varepsilon^{-\mu t}$, $t = \overline{1,\delta}$, соответственно. В результате последующего суммирования получим

$$\Bigl(\sum_{t=1}^{\delta} \varepsilon^{(1-\mu)t}\Bigr)\Bigl(\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z)\bigl(J^{\rho} S(z)\bigr)^{(s_i)}\Bigr) +$$
$$+ \Bigl(\sum_{t=1}^{\delta} \varepsilon^{-\mu t}\Bigr)\Bigl(\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z)\mathfrak{J}^{(s_i)}(z)\Bigr) + \sum_{\eta=0}^{h}\Bigl(\sum_{t=1}^{\delta} \varepsilon^{(q_\eta-\mu)t}\Bigr)\cdot \tag{39}$$
$$\cdot \sum_{\tau=0}^{\zeta_\eta} B_{\mu_{l_\eta+\tau}}(z) S^{\nu_{l_\eta+\tau}}(z) - \Bigl(\sum_{t=1}^{\delta} \varepsilon^{(p-\mu)t}\Bigr) Q(z) S^{\nu_r}(z) \equiv 0.$$

Рассмотрим в отдельности четыре логические возможности:

1) $p = 0$;

2) $p = 1$;

3) $p = q_\lambda,\ p > 1,\ \lambda \in \{0, 1\ \ldots, h\}$;

4) $p > 1,\ p \neq q_\eta,\ \eta = \overline{0,h}\,$.

Пусть $p = 0$. Следуя правилу составления системы тождеств (33), будем последовательно полагать, что

$$\mu = 0;\ \mu = 1;\ \mu = q_\eta,\ q_\eta \neq 0,\ q_\eta \neq 1,\ \eta = \overline{0, h}\,.$$

Пусть $\mu = 0$. Тогда из тождества (39) следует, что

$$\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z)\mathfrak{J}^{(s_i)}(z) + \\ + \delta_{q_0}^0 \sum_{\tau=0}^{\zeta_0} B_{\mu_{l_0+\tau}}(z) S^{\nu_{l_0+\tau}}(z) - Q(z)S^{\nu_r}(z) = 0,\ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{40}$$

где $\delta_{q_0}^0$ — символ Кронекера.

Пусть $\mu = 1$. Тогда из тождества (39) следует, что

$$\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z)\big(J^\rho S(z)\big)^{(s_i)} + \\ + \sum_{k=0}^{1} \delta_{q_k}^1 \sum_{\tau=0}^{\zeta_k} B_{\mu_{l_k+\tau}}(z) S^{\nu_{l_k+\tau}}(z) = 0,\ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{41}$$

Пусть $\mu = q_\eta,\ q_\eta \neq 0,\ q_\eta \neq 1,\ \eta = \overline{0, h}\,.$ Тогда из тождества (39) следует, что при всех $\eta = \overline{0, h}$

$$(1 - \delta_{q_\eta}^0)(1 - \delta_{q_\eta}^1) \sum_{\tau=0}^{\zeta_\eta} B_{\mu_{l_\eta+\tau}}(z) S^{\nu_{l_\eta+\tau}}(z) = 0,\ \forall z \in \mathbb{C}. \tag{42}$$

Тем самым доказана

Теорема 6. *Для того чтобы все полиномы семейства* (35) *являлись решениями алгебраического дифференциального уравнения* (34), *достаточно, а при* $p = 0$ *и необходимо, чтобы полиномы* B_{μ_r} *и* B_{μ_j} *были связаны тождеством* (9), *в котором полином* S *такой, что* $J^\rho S$ *является решением системы уравнений*

$$\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z) w^{(s_i)} + \sum_{k=0}^{1} \delta_{q_k}^{1} \sum_{\tau=0}^{\zeta_k} B_{\mu_{l_k+\tau}}(z) \bigl(w^{(\rho)}\bigr)^{\nu_{l_k+\tau}} = 0,$$
$$(1-\delta_{q_\eta}^{0})(1-\delta_{q_\eta}^{1}) \sum_{\tau=0}^{\zeta_\eta} B_{\mu_{l_\eta+\tau}}(z) \bigl(w^{(\rho)}\bigr)^{\nu_{l_\eta+\tau}} = 0, \ \eta = \overline{0, h}, \tag{43}$$

а полином $\mathfrak{J}$ — решением уравнения

$$\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z) w^{(s_i)} + \delta_{q_0}^{0} \sum_{\tau=0}^{\zeta_0} B_{\mu_{l_0+\tau}}(z) S^{\nu_{l_0+\tau}}(z) - - Q(z) S^{\nu_r}(z) = 0, \tag{44}$$

где δ_j^i — символ Кронекера.

Достаточное условие теоремы 6 не требует выполнения ограничения $p = 0$.

Действительно, то, что выполняется соотношение (9), означает, что полиномы (35) являются решениями дифференциального уравнения

$$B_{\mu_r}(z) \bigl(w^{(\rho)}\bigr)^{\nu_r} + B_{\mu_j}(z) \bigl(w^{(\rho)}\bigr)^{\nu_j} + Q(z) \bigl(w^{(\rho)}\bigr)^{\nu_r} = 0. \tag{45}$$

Из (44) и (45) следуют тождества (40) – (42), сложив которые, получим тождество, равносильное тому, что полиномы (35) являются решениями уравнения

$$\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z) w^{(s_i)} + \sum_{\substack{l=0, \\ l \neq r,\, l \neq j}}^{H} B_{\mu_l}(z) \bigl(w^{(\rho)}\bigr)^{\nu_l} - Q(z) \bigl(w^{(\rho)}\bigr)^{\nu_r} = 0. \tag{46}$$

Сложив равенства (45) и (46), получим, что все полиномы семейства (35) являются решениями уравнения (34).

Пример 4. Рассмотрим уравнение

$$
\begin{gathered}
-z(z^4+2z^2+z+3)w''+6(z^2+1)w'+6(z^3-z+1)w- \\
-6z^4+6z^3-12z-6^{16}+6^4(z-1)w'''+6^4(w''')^3- \\
-6(z-1)(w''')^4+6^4z(6^2z+1)(w''')^5-6(w''')^6- \\
-6z(6^2z+1)(w''')^8+6^4(z+1)(w''')^{12}-6z(w''')^{15}=0,
\end{gathered}
\tag{47}
$$

принадлежащее классу уравнений (34), где $\rho=3, \nu_r=12, \nu_j=15$.

При этом $\delta=3,\ S\colon z\to 6,\ Q\colon z\to\ -6^4,\ \forall z\in\mathbb{C}$.

Полиномы

$$
B_{\mu_r}\colon z\to 6^4(z+1),\ \forall z\in\mathbb{C}, \quad \text{и} \quad B_{\mu_j}\colon z\to\ -6z,\ \forall z\in\mathbb{C},
$$

связаны тождеством (9).

Полином

$$
J^\rho S\colon z\to z^3,\ \forall z\in\mathbb{C},
$$

является решением системы дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
-z(z^4+2z^2+z+3)w''+6(z^2+1)w'+6(z^3-z+1)w- \\
-6^4(z+1)w'''-6(z-1)(w''')^4=0, \\
6^4z(6^2z+1)(w''')^5-6z(6^2z+1)(w''')^8=0,
\end{gathered}
$$

которая принадлежит классу систем вида (43).

Полином

$$
\mathfrak{J}\colon z\to z-1,\ \forall z\in\mathbb{C},
$$

является решением уравнения

$$
-z(z^4+2z^2+z+3)w''+6(z^2+1)w'+6(z^3-z+1)w-6z(z^3-z^2+2)=0
$$

вида (44).

В силу теоремы 6 полиномы

$$
w_t\colon z\to\varepsilon_t z^3+z+1,\ \forall z\in\mathbb{C},\ t=\overline{1,3}\,,
$$

являются решениями уравнения (47).

Пусть $p=1$. Следуя правилу составления системы тождеств (33), будем последовательно полагать, что

$$\mu=0;\ \mu=1;\ \mu=q_\eta,\ q_\eta\neq 0,\ q_\eta\neq 1,\ \eta=\overline{0,h}\,.$$

На основании рассуждений, аналогичных приведённым при доказательстве теоремы 6, устанавливаем, что имеет место

Теорема 7. *Для того чтобы все полиномы семейства* (35) *являлись решениями уравнения* (34), *достаточно, а при* $p=1$ *и необходимо, чтобы полиномы* B_{μ_r} *и* B_{μ_j} *были связаны тождеством* (9), *где полином* S *такой, что* $J^\rho S$ *является решением системы уравнений*

$$\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z)w^{(s_i)}+\sum_{k=0}^{1}\delta_{q_k}^{1}\sum_{\tau=0}^{\zeta_k}B_{\mu_{l_k+\tau}}(z)\bigl(w^{(\rho)}\bigr)^{\nu_{l_k+\tau}}-$$

$$-Q(z)\bigl(w^{(\rho)}\bigr)^{\nu_r}=0, \tag{48}$$

$$\bigl(1-\delta_{q_\eta}^{0}\bigr)\bigl(1-\delta_{q_\eta}^{1}\bigr)\sum_{\tau=0}^{\zeta_\eta}B_{\mu_{l_\eta+\tau}}(z)\bigl(w^{(\rho)}\bigr)^{\nu_{l_\eta+\tau}}(z)=0,\ \eta=\overline{0,h}\,.$$

а полином $\mathfrak{J}$ *— решением уравнения*

$$\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z)w^{(s_i)}+\delta_{q_0}^{0}\sum_{\tau=0}^{\zeta_0}B_{\mu_{l_0+\tau}}(z)S^{\nu_{l_0+\tau}}(z)=0. \tag{49}$$

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$4(2z+1)w-(2z^2+z-6)w'-2(z+3)w''+$$
$$+z(3z+2)w^{(IV)}-(24z^3-6z^2+55z-82)+(24^3z^3-2)w'''+$$
$$+24^3z^5(w''')^2+24^3z^7(w''')^3-(w''')^4-z^2(w''')^5- \tag{50}$$
$$-z^4(w''')^6+24^3z^5(w''')^7-24^3z^3(w''')^8+z^2(24^3z^2-1)(w''')^{10}+$$
$$+(24^3z^3+1)(w''')^{11}-z(w''')^{13}-(w''')^{14}=0,$$

которое принадлежит классу (34), где $\rho = 3, \nu_r = 10, \nu_j = 13.$

При этом

$$\delta = 3,\ S\colon z \to 24z,\ Q\colon z \to z^2,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Полиномы

$$B_{\mu_r}: z \to z^2(24^3z^2 - 1),\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{и} \quad B_{\mu_j}: z \to\ -z,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

связаны тождеством (9).

Полином

$$J^\rho S\colon z \to z^4,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

является решением системы дифференциальных уравнений

$$4(2z+1)w - (2z^2+z-6)w' - 2(z+3)w'' + z(3z+2)w^{(IV)} +$$

$$+ (24^3z^3 - 2)w''' - (w''')^4\ + 24^3z^5(w''')^7 - z^2(w''')^{10} = 0,$$

$$24^3z^5(w''')^2 - z^2(w''')^5 - 24^3z^3(w''')^8 + (24^3z^3+1)(w''')^{11} - (w''')^{14} = 0,$$

соответствующей системе (48).

Полином

$$\mathfrak{J}\colon z \to 6z^2 - 3z + 2,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

является решением уравнения (49), которое в данном случае имеет вид

$$4(2z+1)w - (2z^2+z-6)w' - 2(z+3)w'' - 24z^3 + 6z^2 - 55z + 82 = 0.$$

В силу теоремы 7 полиномы

$$w_t: z \to \varepsilon_t z^4 + 6z^2 - 3z + 2,\ \forall z \in \mathbb{C},\ t = \overline{1,3}\,,$$

являются решениями уравнения (50).

При $p = q_\lambda,\ p > 1,\ \lambda \in \{0, 1, \ldots, h\},$ аналогичнными рассуждениями доказываем, что справедлива

Теорема 8. *Для того чтобы все полиномы семейства* (35) *являлись решениями уравнения* (34), *достаточно, а при* $p = q_\lambda,\ p > 1, \lambda \in \{0, 1, \ldots, h\},$ *и необходимо, чтобы полиномы* B_{μ_r} *и* B_{μ_j} *были связаны тождеством* (9), *где полином* S *такой, что* $J^\rho S$ *является решением системы уравнений*

$$\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z) w^{(s_i)} + \sum_{k=0}^{1} \delta_{q_k}^1 \sum_{\tau=0}^{\zeta_k} B_{\mu_{l_{k+\tau}}}(z) \bigl(w^{(\rho)}\bigr)^{\nu_{l_{k+\tau}}} = 0,$$

$$\sum_{\tau=0}^{\zeta_\lambda} B_{\mu_{l_{\lambda+\tau}}}(z) \bigl(w^{(\rho)}\bigr)^{\nu_{l_{\lambda+\tau}}} - Q(z)\bigl(w^{(\rho)}\bigr)^{\nu_r} = 0, \qquad (51)$$

$$\bigl(1-\delta_{q_\eta}^0\bigr)\bigl(1-\delta_{q_\eta}^1\bigr) \sum_{\tau=0}^{\zeta_\eta} B_{\mu_{l_{\eta+\tau}}}(z) \bigl(w^{(\rho)}\bigr)^{\nu_{l_{\eta+\tau}}}(z) = 0,\ \eta = \overline{0,h}\,,$$

а полином $\mathfrak{I}$ *— решением уравнения* (49).

Пример 6. Рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered}
120zw + 24(1-z^2)w' + 6(z^3+z^2+1)w'' + 2(1-z^4)w''' + \\
+ (2z^5+z^4+3z^3+2z^2+z+1)w^{(V)} - 4(12z^4-21z^3+ \\
+ 18z^2-51z+1) + (1-z^4)w^{(IV)} - (z-2)(z-1)^4\bigl(w^{(IV)}\bigr)^2 + \\
+ (z-1)^7\bigl(w^{(IV)}\bigr)^3 + \bigl((z-1)^4+24\bigr)\bigl(w^{(IV)}\bigr)^4 + \qquad (52) \\
+ 2(z-1)^4\bigl(w^{(IV)}\bigr)^5 - \bigl((z-1)^{12}+z(z-1)^8-z+2\bigr)\bigl(w^{(IV)}\bigr)^6 + \\
+ (z-1)^3(z-2)\bigl(w^{(IV)}\bigr)^7 - \bigl(w^{(IV)}\bigr)^8 - 2\bigl(w^{(IV)}\bigr)^9 + \\
+ z(z^2+1)(z-1)^4\bigl(w^{(IV)}\bigr)^{10} + \bigl((z-1)^4-1\bigr)\bigl(w^{(IV)}\bigr)^{11} - \\
- z^3\bigl(w^{(IV)}\bigr)^{14} - \bigl(w^{(IV)}\bigr)^{15} + \bigl(w^{(IV)}\bigr)^{18} = 0,
\end{gathered}$$

которое принадлежит классу (34), где $\rho = 4, \nu_r = 10, \nu_j = 14$.

При этом $\delta = 4,\ S\colon z \to z-1,\ Q\colon z \to -z(z-1)^4,\ \forall z \in \mathbb{C}$.

Полиномы

$$B_{\mu_r}: z \to z(z^2+1)(z-1)^4\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{и} \quad B_{\mu_j}: z \to -z^3,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

связаны тождеством (9).

Полином

$$J^{\rho}S\colon z \to \frac{1}{120}\, z^4(z-5),\ \forall z \in \mathbb{C},$$

является решением системы уравнений

$$120zw + 24(1-z^2)w' + 6(z^3+z^2+1)w'' + 2(1-z^4)w''' +$$

$$+ (2z^5+z^4+3z^3+2z^2+z+1)w^{(V)} + (1-z^4)w^{(IV)} +$$

$$+ 2(z-1)^4\bigl(w^{(IV)}\bigr)^5 - 2\bigl(w^{(IV)}\bigr)^9 = 0,$$

$$-(z-2)(z-1)^4\bigl(w^{(IV)}\bigr)^2 - \bigl((z-1)^{12} + z^2(z-1)^8 - z + 2\bigr)\bigl(w^{(IV)}\bigr)^6 +$$

$$+ \bigl(w^{(IV)}\bigr)^{18} + z(z^2-1)^4\bigl(w^{(IV)}\bigr)^{10} = 0,$$

$$(z-1)^7\bigl(w^{(IV)}\bigr)^3 + (z-2)(z-1)^3\bigl(w^{(IV)}\bigr)^7 +$$

$$+ \bigl((z-1)^4 - 1\bigr)\bigl(w^{(IV)}\bigr)^{11} - \bigl(w^{(IV)}\bigr)^{15} = 0,$$

соответствующей системе (51).

Полином

$$\mathfrak{J}\colon z \to \frac{1}{3}\, z^3 - z - 1,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

является решением уравнения (49), которое в данном случае имеет вид

$$120zw + 24(1-z^2)w' + 6(z^3+z^2+1)w'' +$$

$$+ 2(1-z^4)w''' - 4(6z^4+3z^3-18z^2-27z-5) = 0.$$

В силу теоремы 8 полиномы

$$w_t\colon z \to \frac{\varepsilon_t}{120}\, z^4(z-5) + \frac{1}{3}\, z^3 - z - 1,\ \forall z \in \mathbb{C},\ t = \overline{1,4}\,,$$

являются решениями уравнения (52).

Пусть $p > 1,\ p \neq q_\eta,\ \eta = \overline{0,h}$. Следуя правилу составления системы тождеств (33), будем последовательно полагать, что

$$\mu = 0;\ \mu = 1;\ \mu = p,\ \mu = q_\eta,\ q_\eta \neq 0,\ q_\eta \neq 1,\ \eta = \overline{0,h}\,.$$

Аналогичными рассуждениями доказываем, что справедлива

Теорема 9. *Для того чтобы все полиномы семейства* (35) *являлись решениями уравнения* (34), *достаточно, а при* $p>1,\ p\neq q_\eta,\ \eta=\overline{0,h}$, *и необходимо, чтобы полиномы* B_{μ_r} *и* B_{μ_j} *были связаны тождеством* (19), *где полином* S *такой, что* $J^\rho S$ *является решением системы уравнений*

$$\sum_{i=0}^{H} A_{r_i}(z)w^{(s_i)}+\sum_{k=0}^{1}\delta^1_{q_k}\sum_{\tau=0}^{\zeta_k} B_{\mu_{l_k+\tau}}(z)\bigl(w^{(\rho)}\bigr)^{\nu_{l_k+\tau}}=0,$$

$$\bigl(1-\delta^0_{q_\eta}\bigr)\bigl(1-\delta^1_{q_\eta}\bigr)\sum_{\tau=0}^{\zeta_\eta} B_{\mu_{l_\eta+\tau}}(z)\bigl(w^{(\rho)}\bigr)^{\nu_{l_\eta+\tau}}=0,\ \eta=\overline{0,h}, \tag{53}$$

а полином $\mathfrak{J}$ — *решением уравнения* (49).

Пример 7. Рассмотрим уравнение

$$\begin{gathered}120(z^2-1)w+120z^2(z-1)w'-24z^3(z-1)w''-4z^5w'''-\\ -z^6w^{(IV)}+\Bigl(z^8-\frac{1}{6}z^7-z^6\Bigr)w^{(VI)}-24(8z^6-8z^5-31z^4+\\ +16z^3+20z^2-10)+z^5w^{(V)}+z^3(6z-1)^5\bigl(w^{(V)}\bigr)^2+\\ +4(6z-1)^6\bigl(w^{(V)}\bigr)^3+2(6z-1)^5\bigl(w^{(V)}\bigr)^4-2(6z-1)^5\bigl(w^{(V)}\bigr)^5+\\ +3(6z-1)^5\bigl(w^{(V)}\bigr)^6-z^3\bigl(w^{(V)}\bigr)^7+(6z-1)\bigl((6z-1)^9-\\ -(6z-1)^4-4\bigr)\bigl(w^{(V)}\bigr)^8+\bigl((6z-1)^5-2\bigr)\bigl(w^{(V)}\bigr)^9+\\ +\bigl((6z-1)^5+2\bigr)\bigl(w^{(V)}\bigr)^{10}-3\bigl(w^{(V)}\bigr)^{11}+\bigl(w^{(V)}\bigr)^{13}-\\ -\bigl(w^{(V)}\bigr)^{14}-\bigl(w^{(V)}\bigr)^{15}-\bigl(w^{(V)}\bigr)^{18}=0,\end{gathered} \tag{54}$$

которое принадлежит классу уравнений (34), где $\rho=5,\ \nu_r=2,\ \nu_j=7$.

При этом $\delta=5,\ S\colon z\to 6z-1,\ Q\colon z\to 0,\ \forall z\in\mathbb{C}$.

Полиномы

$$B_{\mu_r}: z \to z^3(6z-1)^5, \ \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{и} \quad B_{\mu_j}: z \to -z^3, \ \forall z \in \mathbb{C},$$

связаны тождеством (19).

Полином

$$J^\rho S\colon z \to \frac{1}{120}\, z^5(z-1), \ \forall z \in \mathbb{C},$$

является решением системы уравнений

$$120(z^2-1)w + 120z^2(z-1)w' - 24z^3(z-1)w'' - 4z^5w''' - z^6w^{(IV)} +$$

$$+\Big(z^8 - \frac{1}{6}z^7 - z^6\Big)w^{(VI)} + z^5w^{(V)} + 3(6z-1)^5\big(w^{(V)}\big)^6 - 3\big(w^{(V)}\big)^{11} = 0,$$

$$4(6z-1)^6\big(w^{(V)}\big)^3 + (6z-1)\big((6z-1)^9 - (6z-1)^4 - 4\big)\big(w^{(V)}\big)^8 +$$

$$+\big(w^{(V)}\big)^{13} - \big(w^{(V)}\big)^{18} = 0,$$

$$2(6z-1)^5\big(w^{(V)}\big)^4 + \big((6z-1)^5 - 2\big)\big(w^{(V)}\big)^9 - \big(w^{(V)}\big)^{14} = 0,$$

соответствующей системе (53).

Полином

$$\mathfrak{J}\colon z \to z^4 - 2z^2 + 2, \ \forall z \in \mathbb{C},$$

является решением уравнения (49), которое в данном случае имеет вид

$$120(z^2-1)w + 120z^2(z-1)w' - 24z^3(z-1)w'' - 4z^5w''' - z^6w^{(IV)} -$$

$$-24(8z^6 - 8z^5 - 31z^4 + 16z^3 + 20z^2 - 10) = 0.$$

В силу теоремы 9 полиномы

$$w_t: z \to \frac{\varepsilon_t}{120}\, z^5(z-1) + z^4 - 2z^2 + 2, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ t = \overline{1,5}\,,$$

являются решениями уравнения (54).

Глава III

КОЛИЧЕСТВО ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ РАЗЛИЧНЫХ СТЕПЕНЕЙ

Основываясь на примерах предыдущих глав, можем утверждать, что существуют дифференциальнные уравнения, у которых бесконечно много полиномиальных решений. Однако, если наложить условие о том, что будем различать классы полиномов-решений в зависимости от их степени, то уже на основании теорем 1.2.1.1 и 1.3.1.1 можем заключить, что полиномиальных решений с различными степенями у алгебраических дифференциальных уравнений (1.1.1.1) конечное число.

Для простейших уравнений вида

$$A(z)w^{(l)} = \sum_{j=0}^{n} B_{\nu_j}(z)w^{\nu_j}$$

такая задача рассматривалась в работе [135]. Это первая постановка задачи, последующее обобщение без изменения сути предложенного метода находим в работах [63; 129; 136; 127], а общий случай алгебраического дифференциального уравнения (1.1.1.1) рассмотрен в [26] и [72, с. 69–99].

§ 1. Вспомогательные утверждения

Пусть полиномы

$$w_\tau\colon z \to \sum_{h=0}^{m_\tau} \alpha_{m_\tau h} z^{m_\tau - h}, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ \alpha_{m_\tau 0} \neq 0, \tau = \overline{0,r}\,, \qquad (1)$$

имеют различные степени m_τ. Без ограничения общности рассуждений будем считать, что

$$m_0 < m_1 < \ldots < m_r. \qquad (2)$$

Положив $r = N$, построим определитель

$$\Delta_{N+1} = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0\tau} & \ldots & a_{0N} \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1\tau} & \ldots & a_{1N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{\tau 0} & a_{\tau 1} & \ldots & a_{\tau\tau} & \ldots & a_{\tau N} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r0} & a_{r1} & \ldots & a_{r\tau} & \ldots & a_{rN} \end{vmatrix}$$

порядка $N+1$, членами которого являются полиномы

$$a_{\tau i} \colon z \to \prod_{k=1}^{s_i} \Bigl(w_\tau^{(l_{k_i})}(z) \Bigr)^{\nu_{k_i}}, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ \tau = \overline{0, r}\,, \ i = \overline{0, N}\,. \tag{3}$$

Определитель Δ_{N+1} является полиномом комплексного переменного z. Используя лексикографическое представление (1) полиномов w_τ, элементы определителя Δ_{N+1} запишем в виде

$$a_{\tau i} \colon z \to \overset{*}{K}_i \bigl(m_\tau, \alpha_{m_\tau 0} \bigr) z^{\varkappa_i m_\tau - \mathfrak{m}_i} + \ldots\,, \ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{4А}$$

для $\tau \in \{0, 1, \ldots, r\}$, $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$ таких, что $0 < \mathfrak{l}_i \leqslant m_\tau$; для $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$ таких, что $\mathfrak{l}_i = 0$, при любых $\tau \in \{0, 1, \ldots, r\}$, или

$$a_{\tau i} \colon z \to 0, \ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{4Б}$$

для $\tau \in \{0, 1, \ldots, r\}$, $i \in \{0, 1, \ldots, N\}$ таких, что $\mathfrak{l}_i > m_\tau$.

Определитель Δ_{N+1}, обладающий свойством

$$\varkappa_0 \leqslant \varkappa_1 \leqslant \ldots \leqslant \varkappa_N, \tag{5}$$

будем обозначать $\widetilde{\Delta}_{N+1}$. Определитель Δ_{N+1} всегда может быть приведён к виду $\widetilde{\Delta}_{N+1}$, так как перестановкой столбцов в Δ_{N+1} всегда может быть достигннута ситуация (5), причём эти определители будут либо совпадать ($\widetilde{\Delta}_{N+1} = \Delta_{N+1}$), либо отличаться только знаком ($\widetilde{\Delta}_{N+1} = -\Delta_{N+1}$).

Укажем некоторые свойства этих определителей.

Лемма 1. *Пусть полиномы* (1) *имеют различные степени* (2) *такие, что* $m_0 \geqslant \mathfrak{l}$. *Тогда степень полинома* $\widetilde{\Delta}_{N+1}$ $(N = r)$ *равна сумме степеней полиномов, являющихся элементами главной диагонали определителя* $\widetilde{\Delta}_{N+1}$, *т.е.*

$$\deg \widetilde{\Delta}_{N+1}(z) = \sum_{i=0}^{N} \deg a_{ii}(z) = \sum_{i=0}^{N} (\varkappa_i m_i - \mathfrak{m}_i), \tag{6}$$

если для существующих среди всего множества чисел $\varkappa_i$ *таких, что*

$$\varkappa_{s_0^\delta} = \varkappa_{s_1^\delta} = \ldots = \varkappa_{s_{j_\delta}^\delta}, \ \delta = \overline{0, \lambda}, \ 0 \leqslant \lambda < N, \tag{7}$$

соответствующие элементы в определителе $\widetilde{\Delta}_{N+1}$ *такие, что определители*

$$\begin{vmatrix} \widehat{K}_{s_0^\delta}(n_0^\delta) & \widehat{K}_{s_1^\delta}(n_0^\delta) & \ldots & \widehat{K}_{s_{j_\delta}^\delta}(n_0^\delta) \\ \widehat{K}_{s_0^\delta}(n_1^\delta) & \widehat{K}_{s_1^\delta}(n_1^\delta) & \ldots & \widehat{K}_{s_{j_\delta}^\delta}(n_1^\delta) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \widehat{K}_{s_0^\delta}(n_{j_\delta}^\delta) & \widehat{K}_{s_1^\delta}(n_{j_\delta}^\delta) & \ldots & \widehat{K}_{s_{j_\delta}^\delta}(n_{j_\delta}^\delta) \end{vmatrix} \neq 0, \ \ \delta = \overline{0, \lambda}, \tag{8}$$

при любых натуральных числах

$$n_0^\delta < n_1^\delta < \ldots < n_{j_\delta}^\delta, \ n_0^\delta \geqslant \mathfrak{l}, \ \delta = \overline{0, \lambda}. \tag{9}$$

Доказательство. В силу (2) неравенство $m_0 \geqslant \mathfrak{l}$ означает, что все элементы $a_{\tau i}$, $i = \overline{0, N}$, $\tau = \overline{0, r}$, $r = N$, определителя $\widetilde{\Delta}_{N+1}$ являются полиномами с расположением членов (4А).

Используем метод математической индукции.

При $N = 1$ рассмотрим определитель второго порядка

$$\widetilde{\Delta}_2(z) = \begin{vmatrix} a_{00}(z) & a_{01}(z) \\ a_{10}(z) & a_{11}(z) \end{vmatrix} =$$

$$=\begin{vmatrix} \Big\{\overset{*}{K}_0\big(m_0,\alpha_{m_0 0}\big)z^{\varkappa_0 m_0-\mathfrak{m}_0}+\ldots\Big\} & \Big\{\overset{*}{K}_1\big(m_0,\alpha_{m_0 0}\big)z^{\varkappa_1 m_0-\mathfrak{m}_1}+\ldots\Big\} \\ \Big\{\overset{*}{K}_0\big(m_1,\alpha_{m_1 0}\big)z^{\varkappa_0 m_1-\mathfrak{m}_0}+\ldots\Big\} & \Big\{\overset{*}{K}_1\big(m_1,\alpha_{m_1 0}\big)z^{\varkappa_1 m_1-\mathfrak{m}_1}+\ldots\Big\} \end{vmatrix},$$

где фигурнные скобки применены с целью выделения элементов $a_{\tau i}$ определителя $\widetilde{\Delta}_2$.

Оценим разность

$$((\varkappa_0 m_0-\mathfrak{m}_0)+(\varkappa_1 m_1-\mathfrak{m}_1))-((\varkappa_0 m_1-\mathfrak{m}_0)+(\varkappa_1 m_0-\mathfrak{m}_1))=$$

$$=(m_1-m_0)(\varkappa_1-\varkappa_0).$$

Если $\varkappa_1>\varkappa_0$, то в силу (2) произведение

$$(m_1-m_0)(\varkappa_1-\varkappa_0)>0,$$

а значит, степень полинома $\widetilde{\Delta}_2$ определяется уменьшаемым рассматриваемой разности, т.е.

$$\deg\widetilde{\Delta}_2(z)=(\varkappa_0 m_0-\mathfrak{m}_0)+(\varkappa_1 m_1-\mathfrak{m}_1)=\deg a_{00}(z)+\deg a_{11}(z),$$

что соответствует (6).

Если $\varkappa_0=\varkappa_1=\varkappa$, то

$$\widetilde{\Delta}_2(z)=\alpha_{m_0 0}^{\varkappa}\,\alpha_{m_1 0}^{\varkappa}\begin{vmatrix}\widehat{K}_0(m_0) & \widehat{K}_1(m_0)\\ \widehat{K}_0(m_1) & \widehat{K}_1(m_1)\end{vmatrix}\, z^{(m_0-m_1)\varkappa-(\mathfrak{m}_0+\mathfrak{m}_1)}+\ldots,$$

и, стало быть,

$$\deg\widetilde{\Delta}_2(z)=(m_0-m_1)\varkappa-(\mathfrak{m}_0+\mathfrak{m}_1)=\deg a_{00}(z)+\deg a_{11}(z),$$

если только при любых натуральных числах n_0 и n_1 таких, что $\mathfrak{l}\leqslant n_0<n_1$, определитель

$$\begin{vmatrix}\widehat{K}_0(n_0) & \widehat{K}_1(n_0)\\ \widehat{K}_0(n_1) & \widehat{K}_1(n_1)\end{vmatrix}\neq 0.$$

Это также соответствует (6), и утверждение леммы при $N = 1$ доказано.

Для случая, когда $N \geqslant 2$, предварительно докажем следующее утвержденние.

Если при $t = \overline{1, k-1}$ *степени полиномов* $\widetilde{\Delta}_{t+1}$ *определяются по правилу*

$$\deg \widetilde{\Delta}_{t+1}(z) = \sum_{i=0}^{t} \deg a_{ii}(z),$$

то для определителя $\widetilde{\Delta}_{k+1}$ *справедливо соотношение*

$$\begin{gathered} \deg a_{0k}(z) + \deg \widetilde{\Delta}_{k0k}(z) < \deg a_{1k}(z) + \deg \widetilde{\Delta}_{k1k}(z) < \\ < \ldots < \deg a_{kk}(z) + \deg \widetilde{\Delta}_{kkk}(z), \end{gathered} \tag{10}$$

где $\widetilde{\Delta}_{khk}$ *— определитель* k*-го порядка, полученный из определителя* $\widetilde{\Delta}_{k+1}$ *в результате вычёркивания строки с номером* h *и столбца с номером* k*, причём, если размерности* $\varkappa_\tau < \varkappa_k$*, где* $\tau \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$*, то*

$$\deg a_{\tau k}(z) + \deg \widetilde{\Delta}_{k\tau k}(z) < \deg a_{\tau+1,k}(z) + \deg \widetilde{\Delta}_{k,\tau+1,k}(z). \tag{11}$$

Действительно, в соответствии с теоремой Лапласа [10, с.30] в результате разложения определителя $\widetilde{\Delta}_{k+1}$ по столбцу с номером k будем иметь, что

$$\widetilde{\Delta}_{k+1} = \sum_{h=0}^{k} (-1)^{k+h} a_{hk} \widetilde{\Delta}_{khk}. \tag{12}$$

Пусть $\tau \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Используя правило вычисления степеней полиномов $\widetilde{\Delta}_{t+1}$, $t = \overline{1, k-1}$, оценим разность

$$\left(\deg a_{\tau+1,k} + \deg \widetilde{\Delta}_{k,\tau+1,k}\right) - \left(\deg a_{\tau k} + \deg \widetilde{\Delta}_{k\tau k}\right) =$$

$$= \big(\deg a_{\tau+1,k} + \big(\deg a_{00} + \ldots + \deg a_{\tau-1,\tau-1} + \deg a_{\tau,\tau} +$$

$$+ \deg a_{\tau+2,\tau+1} + \ldots + \deg a_{k,k-1})\big) - \big(\deg a_{\tau k} + (\deg a_{00} + \ldots +$$

$$+ \deg a_{\tau-1,\tau-1} + \deg a_{\tau+1,\tau} + \deg a_{\tau+2,\tau+1} + \ldots + \deg a_{k,k-1})\big) =$$

$$= \deg a_{\tau\tau} + \deg a_{\tau+1,k} - \big(\deg a_{\tau+1,\tau} + \deg a_{\tau k}\big).$$

Рассмотрим определитель второго порядка

$$\widehat{\Delta}_2(z) = \begin{vmatrix} a_{\tau\tau}(z) & a_{\tau k}(z) \\ a_{\tau+1,\tau}(z) & a_{\tau+1,k}(z) \end{vmatrix},$$

который является определителем $\widetilde{\Delta}_2$, а значит, степень определяемого им полинома $\widehat{\Delta}_2$ устанавливается следующим образом:

1) $\varkappa_\tau < \varkappa_k$. Тогда

$$\deg \widehat{\Delta}_2 = \deg a_{\tau\tau} + \deg a_{\tau+1,k}$$

и

$$\deg a_{\tau\tau} + \deg a_{\tau+1,k} - \big(\deg a_{\tau+1,\tau} + \deg a_{\tau k}\big) > 0,$$

а значит,

$$\deg a_{\tau+1,k} + \deg \widetilde{\Delta}_{k,\tau+1,k} > \deg a_{\tau k} + \deg \widetilde{\Delta}_{k\tau k}; \qquad (13)$$

2) $\varkappa_\tau = \varkappa_k$. Тогда

$$\deg \widehat{\Delta}_2 = \deg a_{\tau\tau} + \deg a_{\tau+1,k}$$

при условии, что для любых натуральных чисел n_0 и n_1 таких, что $\mathfrak{l}' \leqslant n_0 < n_1$, где $\mathfrak{l}' = \max\{\mathfrak{l}_\tau, \mathfrak{l}_k\}$, определитель

$$\begin{vmatrix} \widehat{K}_\tau(n_0) & \widehat{K}_k(n_0) \\ \widehat{K}_\tau(n_1) & \widehat{K}_k(n_1) \end{vmatrix} \neq 0,$$

и

$$\deg a_{\tau\tau} + \deg a_{\tau+1,k} - \left(\deg a_{\tau+1,\tau} + \deg a_{\tau k}\right) = 0.$$

Следовательно,

$$\deg a_{\tau+1,k} + \deg \widetilde{\Delta}_{k,\tau+1,k} = \deg a_{\tau k} + \deg \widetilde{\Delta}_{k\tau k}. \qquad (14)$$

Из соотношений (13) и (14) следует цепочка неравенств (10), а если существует $\tau \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ такое, что $\varkappa_\tau < \varkappa_k$, то имеет место строгое неравенство (11).

Продолжая доказательство методом математической индукции, рассмотрим случай $N = 2$.

Определитель третьего порядка

$$\widetilde{\Delta}_3 = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{02} \begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} \\ a_{20} & a_{21} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{20} & a_{21} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{22} \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} = a_{02}\widetilde{\Delta}_{202} - a_{12}\widetilde{\Delta}_{212} + a_{22}\widetilde{\Delta}_{222}.$$

Если $\varkappa_1 < \varkappa_2$, то в силу (11)

$$\deg a_{22} + \deg \widetilde{\Delta}_{222} > \deg a_{12} + \deg \widetilde{\Delta}_{212},$$

и, учитывая представление (12) при $k = 2$,

$$\deg \widetilde{\Delta}_3 = \deg a_{22} + \deg \widetilde{\Delta}_{222} = \sum_{i=0}^{2} \deg a_{ii}.$$

Это соответствует (6), причём, если $\varkappa_0 = \varkappa_1$, то

$$\begin{vmatrix} \widehat{K}_0(n_0^1) & \widehat{K}_1(n_0^1) \\ \widehat{K}_0(n_1^1) & \widehat{K}_1(n_1^1) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (15)$$

при любых натуральных числах n_0^1 и n_1^1 таких, что $\mathfrak{l} \leqslant n_0^1 < n_1^1$, где $\mathfrak{l} = \max\{\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2\}$.

Пусть $\varkappa_1 = \varkappa_2$. Тогда в силу (14)

$$\deg a_{22} + \deg \widetilde{\Delta}_{222} = \deg a_{12} + \deg \widetilde{\Delta}_{212}$$

и

$$\begin{vmatrix} \widehat{K}_1(n_0^2) & \widehat{K}_2(n_0^2) \\ \widehat{K}_1(n_1^2) & \widehat{K}_2(n_1^2) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (16)$$

при любых натуральных числах n_0^2 и n_1^2 таких, что $\mathfrak{l} \leqslant n_0^2 < n_1^2$, где $\mathfrak{l} = \max\{\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2\}$.

Степень $\deg \widetilde{\Delta}_3$ зависит от условий: $\varkappa_0 < \varkappa_1$ или $\varkappa_0 = \varkappa_1$.

Если $\varkappa_0 < \varkappa_1$, то в силу (11)

$$\deg a_{00} + \deg \widetilde{\Delta}_{200} < \deg a_{22} + \deg \widetilde{\Delta}_{222}$$

и, учитывая представление (12) при $k = 2$,

$$\deg \widetilde{\Delta}_3 = \sum_{i=0}^{2} \deg a_{ii}$$

при выполнении (16.)

Если $\varkappa_0 = \varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa$, то непосредственно находим, что

$$\widetilde{\Delta}_3 = \prod_{\tau=0}^{2} \alpha_{m_{\tau_0}}^{\varkappa} \begin{vmatrix} \widehat{K}_0(m_0) & \widehat{K}_1(m_0) & \widehat{K}_2(m_0) \\ \widehat{K}_0(m_1) & \widehat{K}_1(m_1) & \widehat{K}_2(m_1) \\ \widetilde{K}_0^*(m_2) & \widetilde{K}_1^*(m_2) & \widetilde{K}_2^*(m_2) \end{vmatrix} z^{\varkappa \sum\limits_{i=0}^{2} m_i - \varkappa \sum\limits_{i=0}^{2} \mathfrak{m}_i} + \ldots .$$

Стало быть,

$$\deg \widetilde{\Delta}_3 = \varkappa \sum_{i=0}^{2} m_i - \varkappa \sum_{i=0}^{2} \mathfrak{m}_i = \sum_{i=0}^{2} \deg a_{ii},$$

если

$$\begin{vmatrix} \widehat{K}_0(n_0^3) & \widehat{K}_1(n_0^3) & \widehat{K}_2(n_0^3) \\ \widehat{K}_0(n_1^3) & \widehat{K}_1(n_1^3) & \widehat{K}_2(n_1^3) \\ \widehat{K}_0(n_2^3) & \widehat{K}_1(n_2^3) & \widehat{K}_2(n_2^3) \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (17)$$

при любых натуральных числах $n_0^3, \ n_1^3, \ n_2^3$ таких, что $\mathfrak{l} \leqslant n_0^3 < n_1^3 < n_2^3,$ где $\mathfrak{l} = \max\{\mathfrak{l}_0, \mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2\}.$

Итак, при $N = 2$ утверждение леммы доказано.

Пусть утвержденние леммы справедливо при всяком $N \leqslant k-1, \ k \geqslant 3.$ Докажем её справедливость при $N = k.$ Для этого составим соотношение (12).

Если $\varkappa_k > \varkappa_{k-1},$ то в силу (11)

$$\widetilde{\Delta}_{k+1} = \deg a_{kk} + \deg \widetilde{\Delta}_{kkk} = \sum_{i=0}^{k} \deg a_{ii},$$

что соответствует (6).

Заметим, что если среди $\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{k-1}$ существуют такие, что имеет место (7), то должны выполняться и неравенства (8), ибо утверждение леммы верно при всяком $N \leqslant k-1.$

Если же $\varkappa_k = \varkappa_{k-1} = \ldots = \varkappa_{k-s},$ где $1 \leqslant s < k,$ то в силу (12) и справедливости леммы при $N \leqslant k-1$ будем иметь, что

$$\begin{vmatrix} \widehat{K}_{k-s}(n_0) & \widehat{K}_{k-s-1}(n_0) & \ldots & \widehat{K}_{k-1}(n_0) & \widehat{K}_{k}(n_0) \\ \widehat{K}_{k-s}(n_1) & \widehat{K}_{k-s-1}(n_1) & \ldots & \widehat{K}_{k-1}(n_1) & \widehat{K}_{k}(n_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \widehat{K}_{k-s}(n_s) & \widehat{K}_{k-s-1}(n_s) & \ldots & \widehat{K}_{k-1}(n_s) & \widehat{K}_{k}(n_s) \end{vmatrix} \neq 0$$

при любых натуральных числах $n_0, n_1, \ldots, n_s$ таких, что

$$\mathfrak{l} \leqslant n_0 < n_1 < \ldots < n_s.$$

Если же размерности $\varkappa_0 = \varkappa_1 = \ldots = \varkappa_k = \varkappa$, то непосредственно находим

$$\widehat{\Delta}_{k+1} = \prod_{i=0}^{k} \alpha_{m_i 0}^{\varkappa} \begin{vmatrix} \widehat{K}_0(m_0) & \ldots & \widehat{K}_k(m_0) \\ \widehat{K}_0(m_k) & \ldots & \widehat{K}_k(m_k) \end{vmatrix} z^{\varkappa \sum\limits_{i=0}^{k} m_i - \sum\limits_{i=0}^{k} \mathfrak{m}_i} + \ldots .$$

Стало быть,

$$\deg \widetilde{\Delta}_{k+1} = \varkappa \sum_{i=0}^{k} m_i - \sum_{i=0}^{k} \mathfrak{m}_i = \sum_{i=0}^{k} \deg a_{ii},$$

если

$$\begin{vmatrix} \widehat{K}_0(n_0) & \ldots & \widehat{K}_k(n_0) \\ \widehat{K}_0(n_k) & \ldots & \widehat{K}_k(n_k) \end{vmatrix} \neq 0$$

при любых натуральных числах $n_0, n_1, \ldots, n_k$ таких, что $\mathfrak{l} \leqslant n_0 < n_1 < \ldots < n_k$. Это соответствует (6). ■

Непосредственным следствием леммы 1 является

Лемма 2. *Пусть полиномы* (1) *имеют различные степени* (2) *такие, что* $m_0 \geqslant \mathfrak{l}$. *Для существующих среди всего множества чисел* $\varkappa_i$, $i = \overline{0, N}$, $N = r$, *таких, которые удовлетворяют соотношению* (7), *соответствующие элементы определителя* $\widetilde{\Delta}_{N+1}$ *связаны неравенствами* (8) *при любых натуральных числах* (9). *Тогда определитель* $\widetilde{\Delta}_{N+1}$, *а значит, и определитель* Δ_{N+1} *отличны от нуля.*

Пусть числа $\mathfrak{l}_i$ такие, что

$$\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l}_1 = \ldots = \mathfrak{l}_p < \mathfrak{l}_{p+1} = \mathfrak{l}_{p+2} = \ldots = \mathfrak{l}_N, \ 0 \leqslant p < N. \qquad (18)$$

Между степенями m_τ многочленов (1) рассмотрим следующие соотношения относительно $\mathfrak{l}_0$ и $\mathfrak{l}_N$:

1) $\mathfrak{l}_N \leqslant m_0$;

2) $\mathfrak{l}_0 \leqslant m_0,\ m_r < \mathfrak{l}_N$;

3) $\mathfrak{l}_0 \leqslant m_0,\ m_s < \mathfrak{l}_N \leqslant m_{s+1},\ 0 \leqslant s < r.$

Вполне очевидно, что в первом случае $(\mathfrak{l}_N \leqslant m_0)$ справедливо утверждение леммы 2.

Во втором случае составим определитель $p+1$-го порядка Δ_{p+1} на основании первых $p+1$ членов с $\mathfrak{l}_0 = \ldots = \mathfrak{l}_p$.

Члены определителя Δ_{p+1} находятся по формуле (3) и имеют лексикографическое представление (4A).

Поэтому совершенно аналогично доказываются леммы 1 и 2 при $N = p$.

Пусть $\mathfrak{l}_0 \leqslant m_0,\ m_s < \mathfrak{l}_N \leqslant m_{s+1}$. Тогда определитель Δ_{N+1}, членами которого являются полиномы $a_{\tau i}$, имеет вид

$$\widehat{\Delta}_{N+1} = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & \ldots & a_{0p} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{10} & a_{11} & \ldots & a_{1p} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s0} & a_{s1} & \ldots & a_{sp} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{s+1,0} & a_{s+1,1} & \ldots & a_{s+1,p} & a_{s+1,p+1} & \ldots & a_{s+1,N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r0} & a_{r1} & \ldots & a_{rp} & a_{r,p+1} & \ldots & a_{rN} \end{vmatrix}.$$

Лемма 3. *Если $s > p$, то определитель $\widehat{\Delta}_{N+1}$ тождественно равен нулю.*

Доказательство. В соответствии с теоремой Лапласа определитель $\widehat{\Delta}_{N+1}$ порядка $N+1$ равен сумме произведений всех миноров $s+1$-го порядка, содержащихся в произвольно выбранных $s+1$ строках, $0 \leqslant s \leqslant N-1$, на их алгебраические дополнения.

За $s+1$ строку выберем первые строки, содержащие нулевые элементы.

Если теперь положить, что $s > p$, то любой минор порядка $s+1$, содержащийся в первых $s+1$ строках определителя $\widehat{\Delta}_{N+1}$, равен нулю как содержащий нулевой столбец. ■

Лемма 4. *Если* $s \leqslant p$, *то определитель* $\widehat{\Delta}_{N+1}$ *не обращается в тождественный нуль при условии, что для существующих среди всего множества чисел* $\varkappa_i$, $i = \overline{0, N}$, $N = r$, *таких, которые удовлетворяют соотношению* (7), *соответствующие элементы определителя* $\widehat{\Delta}_{N+1}$ *связаны неравенствами* (8) *при любых натуральных числах*

$$\mathfrak{l}_\delta \leqslant n_0^\delta < n_1^\delta < \ldots < n_{j_\delta}^\delta, \ \delta = \overline{0, \lambda}, \ 0 \leqslant \lambda < N, \tag{19}$$

где $\mathfrak{l}_\delta = \max\Big\{\mathfrak{l}_{n_0^\delta}, \mathfrak{l}_{n_1^\delta}, \ldots, \mathfrak{l}_{n_{j_\delta}^\delta}\Big\}$.

Доказательство леммы 4 основано на рассуждениях, аналогичных приведённым в лемме 1, с предварительным разложением определителя $\widehat{\Delta}_{N+1}$ в соответствии с теоремой Лапласа по минорам $s+1$-го порядка.

Лемма 5. *Если* $\mathfrak{l}_0 \leqslant m_0, m_s < \mathfrak{l}_N \leqslant m_{s+1}, 0 \leqslant s < N$, *и выполняется соотношение* (18), *а для существующих среди всего множества чисел* $\varkappa_i, i = \overline{0, N}$, $N = r$, *таких, которые удовлетворяют соотношению* (7), *соответствующие элементы определителя* $\widehat{\Delta}_{N+1}$ *связаны неравенствами* (8) *при любых натуральных числах* (19), *то определитель* $\widehat{\Delta}_{N+1} \equiv 0$ *тогда и только тогда, когда* $s > p$.

Лемма 5 является непосредственным следствием лемм 3 и 4.

И наконец, пусть $\mathfrak{l}_i$ такие, что

$$\begin{aligned} &\mathfrak{l}_0 = \mathfrak{l}_1 = \ldots = \mathfrak{l}_{p_0} < \mathfrak{l}_{p_0+1} = \ldots = \mathfrak{l}_{p_0+p_1} < \mathfrak{l}_{p_0+p_1+1} = \ldots = \\ &\quad = \mathfrak{l}_{p_0+p_1+p_2} < \ldots < \mathfrak{l}_{p_0+p_1+p_2+\ldots+p_{t-1}+1} = \ldots = \mathfrak{l}_{p_0+\ldots+p_t} \end{aligned} \tag{20}$$

где $p_0 + \ldots + p_t = N$, $0 \leqslant p_0 \leqslant N$, $0 \leqslant p_{j+1} \leqslant N - (p_0 + \ldots + p_j)$, $j = \overline{0, t-1}$.

Между степенями m_τ многочленов (1) рассмотрим следующие соотношения относительно $\mathfrak{l}_0$ и $\mathfrak{l}_N$:

1) $\mathfrak{l}_N \leqslant m_0$;

2) $\mathfrak{l}_0 \leqslant m_0,\ m_s < \mathfrak{l}_N \leqslant m_{s+1},\ 0 \leqslant s < r$;

3) $\mathfrak{l}_0 \leqslant m_0,\ m_r < \mathfrak{l}_N$.

Очевидно, что в первом случае $(\mathfrak{l}_N \leqslant m_0)$ справедливо утверждение леммы 2.

Во втором случае определитель Δ_{N+1}, членами которого являются полиномы $a_{\tau i}$, $\tau = \overline{0, r}$, $i = \overline{0, N}$, $r = N$, составленные по формулам (3), (4А), (4Б), имеет вид

$$\Delta^*_{N+1} = \begin{vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{vmatrix},$$

где блок матрица

$$\begin{Vmatrix} A & B & C \\ D & E & F \end{Vmatrix}$$

состоит из $(s+1)\times(p_0+1)$-матрицы $A = \|A_{ij}\|$, где $A_{ij} = a_{ij}$, $i = \overline{0, s}$, $j = \overline{0, p_0}$, $(s+1)\times(p_1+\ldots+p_{t-1})$-матрицы $B = \|B_{ij}\|$, где $B_{ij} = \widehat{a}_{ij}$, $i = \overline{0, s}$, $j = \overline{p_0+1, p_0+\ldots+p_{t-1}}$,

$$\widehat{a}_{ij} = \left[\begin{array}{lll} a_{ij}, & \text{если} & m_i \geqslant \mathfrak{l}_j, \\ 0, & \text{если} & m_i < \mathfrak{l}_j, \end{array}\right.$$

нуль $(s+1)\times(N-(p_0+\ldots+p_{t-1})$-матрицы C, $(r-s)\times(p_0+1)$-матрицы $D = \|D_{ij}\|$, $D_{ij} = a_{ij}$, $i = \overline{s+1, r}$, $j = \overline{0, p_0}$, $(r-s)\times$ $\times(p_1+\ldots+p_{t-1})$-матрицы $E = \|E_{ij}\|$, $E_{ij} = a_{ij}$, $i = \overline{s+1, r}$, $j = \overline{p_0+1, p_0+\ldots+p_{t-1}}$, $(r-s)\times(N-(p_0+\ldots+p_{t-1})$-матрицы $F = \|F_{ij}\|$, $F_{ij} = a_{ij}$, $i = \overline{s+1, r}$, $j = \overline{p_0+\ldots+p_{t-1}+1, N}$.

Степени $m_s,\ 0 \leqslant s < r = N,$ полиномов (1) связаны соотношениями:

$$\mathfrak{l}_0 \leqslant m_0 < m_1 < \ldots < m_{s_0} < \mathfrak{l}_{p_0+1},\ \ 0 \leqslant s_0 \leqslant p_0 + \ldots + p_1,$$

или

$$\{0, 1, \ldots, s_0\} \neq \varnothing;$$

$$\mathfrak{l}_{p_0+1} \leqslant m_{s_0+1} < m_{s_0+2} < \ldots < m_{s_0+s_1} < \mathfrak{l}_{p_0+p_1+1},$$

$$0 \leqslant s_1 \leqslant p_0 + \ldots + p_{t-1} - s_0$$

или

$$\{s_0 + 1, s_0 + 2, \ldots, s_0 + s_1\} = \varnothing;$$

и т.д.

$$\mathfrak{l}_{p_0+\ldots+p_{t-2}+1} \leqslant m_{s_0+\ldots+s_{t-2}+1} < m_{s_0+\ldots+s_{t-2}+2} <$$

$$< \ldots < m_{s_0+\ldots+s_{t-1}} < \mathfrak{l}_{p_0+\ldots+p_{t-1}+1} = \mathfrak{l}_N,$$

$$0 \leqslant s_{t-1} < p_0 + \ldots + p_{t-1} - (s_0 + s_1 + \ldots + s_{t-2}),$$

где $s_0 + s_1 + \ldots + s_{t-2} + s_{t-1} = s.$

Лемма 6. *Если для каждого* $k \in \{0, 1, \ldots, t-1\}$ *такого, что*

$$\begin{gathered}\{0, 1, \ldots, s_0\} \cup \{s_0 + 1, \ldots, s_0 + s_1\} \cup \ldots \cup \{s_0 + s_1 + \\ + \ldots + s_{k-1} + 1, s_0 + s_1 + \ldots + s_{k-1} + 2, \ldots, s_0 + s_1 + \\ + \ldots + s_{k-1} + s_k\} \neq \varnothing,\ s_0 + s_1 + \ldots + s_k > p_0 + p_1 + \ldots + p_k,\end{gathered} \tag{22}$$

то определитель Δ^*_{N+1} *тождественно равен нулю.*

Доказательство. Используем теорему Лапласа, в соответствии с которой миноры $1 + \sum\limits_{\zeta=0}^{k} s_\zeta$ порядков строим на основании первых $1+\sum\limits_{\zeta=0}^{k} s_{\zeta}$ строк определителя Δ^{*}_{N+1}, начиная с $k\in\{0,1,\ldots,t-1\}$, связанного соотношением (22).

Если теперь положить, что

$$\sum_{\zeta=0}^{k} s_{\zeta} > \sum_{\zeta=0}^{k} p_{\zeta},$$

то в силу (21) любой минор $1+\sum\limits_{\zeta=0}^{k} s_{\zeta}$ порядка обращается в тождественный нуль как определитель, содержащий нулевой столбец. ■

Рссуждениями, аналогичными рассуждениям в случае лемм 4 и 5, доказывается

Лемма 7. *Если*

$$\mathfrak{l}_0 \leqslant m_0,\ m_s < \mathfrak{l}_N \leqslant m_{s+1},\ 0\leqslant s < N = r,$$

и справедливы соотношения (21), *а для существующих среди всего множества чисел* $\varkappa_i,\ i=\overline{0,N}$, *таких, которые удовлетворяют соотношению* (7), *соответствующие элементы определителя* Δ^{*}_{N+1} *связаны неравенствами* (8) *при любых натуральных числах* (19), *то определитель* Δ^{*}_{N+1} *тождественно равен нулю тогда и только тогда, когда для каждого* $k\in\{0,1,\ldots,t-1\}$, *связанного соотношением* (22), *справедливо неравенство*

$$\sum_{\zeta=0}^{k} s_{\zeta} > \sum_{\zeta=0}^{k} p_{\zeta}. \tag{23}$$

В третьем случае, то есть, когда $\mathfrak{l}_0 \leqslant m_0,\ m_r > \mathfrak{l}_N$, отбрасывая члены порядка $\mathfrak{l}_N$, приходим к случаям 1) и 2), где роль $\mathfrak{l}_N$ будет играть $\mathfrak{l}_{N-1}$.

Данный процесс будем продолжать вплоть до $\mathfrak{l}_{p_0+p_1}$, когда вступают в силу леммы $3-5$.

§ 2. Ограниченность количества полиномиальных решений различных степеней числом членов алгебраического дифференциального уравнения

В зависимости от порядка $\mathfrak{l}_i$ членов уравнения (1.1.1.1) перестановкой слагаемых в алгебраическом дифференциальном уравнении (1.1.1.1) всегда можно добиться ситуации (20.0.1). Допустим, что это сделано.

Полиномы (1.0.1) являются нетривиальными полиномиальными решениями алгебраического дифференциального уравнения (1.1.1.1) тогда и только тогда, когда имеет место система тождеств

$$\sum_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(z) \prod_{k=1}^{s_i} \left(w_\tau^{\left(l_{k_i}\right)}(z) \right)^{\nu_{k_i}} \equiv 0, \ \tau = \overline{0,r}\,. \tag{1}$$

На основании (20.0.1) последовательно рассмотрим следующие логические возможности.

Шаг 1. Пусть нетривиальные полиномиальные решения (1.0.1) различных степеней m_τ уравнения (1.1.1.1) такие, что

$$\mathfrak{l}_{p_0} \leqslant m_0 < m_1 < \ldots < m_r < \mathfrak{l}_{p_0+1}, \ 0 \leqslant p_0 \leqslant N, \tag{2}$$

причём, если $p_0 = N,$ то $\mathfrak{l}_{p_0+1}$ будем считать равным $+\infty.$

Подставляя полиномы (1.0.1) при $\tau = \overline{0,r}\,,$ связанные соотношением (2), в уравнение (1.1.1.1) , получаем систему тождеств (1), где $N = p_0,$ так как если существуют в уравнении (1.1.1.1) члены с номерами $t > p_0,$ то в силу (20.0.1) они обращаются в тождественный нуль при данной подстановке.

Если $p_0 = 0,$ то тождества (1) будут иметь вид $B_{\mu_0}(z) \equiv 0,$ и полиномиальных решений степени $m_\tau,\ \tau = \overline{0,r}\,,$ таких, что

$$\mathfrak{l}_0 \leqslant m_0 < m_1 < \ldots < m_l < \mathfrak{l}_1,$$

у уравнения (1.1.1.1) нет.

Если $p_0 > 0$, то система тождеств (1), где $N = p_0$, при $r = p_0$ имеет определитель Δ_{p_0+1}, который при выполнении условий леммы 2.0.1 отличен от нуля. Тогда из системы тождеств (1) получаем, что $B_{\mu_i}(z) \equiv 0$, $i = \overline{0, p_0}$. Это противоречит заданию уравнения (1.1.1.1) при условии (20.0.1), когда $p_0 > 0$.

Итак, доказана

Лемма 1. *Пусть в уравнении* (1.1.1.1) *порядки членов связаны соотношением* (20.0.1) *и для существующих среди всего множества чисел* $\varkappa_i$, $i = \overline{0, p_0}$, *таких, которые удовлетворяют соотношению* (7.0.1), *соответствующие члены уравнения* (1.1.1.1) *связаны неравенствами* (8.0.1) *при любых натуральных числах* (19.0.1). *Тогда уравнение* (1.1.1.1) *имеет нетривиальные полиномиальные решения* (1.0.1) *не более* p_0 *различных степеней* m_τ, *удовлетворяющих условиям* (2).

Шаг 2. Пусть нетривиальные полиномиальные решения (1.0.1) различных степеней m_τ уравнения (1.1.1.1) такие, что

$$\begin{gathered}\mathfrak{l}_{p_0} \leqslant m_0 < m_1 < \ldots < m_{s_0} < \mathfrak{l}_{p_0+p_1},\ 0 \leqslant p_0 \leqslant N,\\ \mathfrak{l}_{p_0+p_1} \leqslant m_{s_0+1} < m_{s_0+2} < \ldots < m_r < \mathfrak{l}_{p_0+p_1+1},\\ 0 < p_1 \leqslant N - p_0,\end{gathered} \tag{3}$$

причём, если $p_0 = N$, то $\mathfrak{l}_{p_0+p_1}$ будем считать $+\infty$, если $p_0 + p_1 = N$, то $\mathfrak{l}_{p_0+p_1+1}$ будем считать $+\infty$; s_0 такое, что $0 \leqslant s_0 \leqslant r$ или $\{0, 1, \ldots, s_0\} = \varnothing$.

Относительно количества r полиномиальных решений (1.0.1) различных степеней и s_0 в случае (3) представляются следующие возможности:

$$s_0 = r; \tag{4}$$

$$\{0, 1, \ldots, s_0\} = \varnothing; \tag{5}$$

$$0 \leqslant s_0 < r, \tag{6}$$

каждую из которых рассмотрим в отдельности.

Если выполняется условие (4), то есть, $s_0 = r$, то соотношение (3) будет иметь вид (2), так как $\ell_{p_0+p_1} = \ell_{p_0+1}$. Значит, имеет место лемма 1.

Пусть выполняются условия (5), то есть, $\{0, 1, \ldots, s_0\} = \varnothing$. Тогда соотношение (3) имеет место лишь при $0 \leqslant p_0 < N$, ибо, если $p_0 = N$, то в уравнении (1.1.1.1) членов с номерами, большими p_0, нет $\bigl(\ell_{p_0+p_1} = +\infty\bigr)$. Соотношение (3) будет иметь вид

$$\ell_{p_0+p_1} \leqslant m_0 < m_1 < \ldots < m_r < \ell_{p_0+p_1+1},\ 0 < p_1 \leqslant N - p_0. \quad (7)$$

Подставляя полиномы (1.0.1) при $\tau = \overline{0, r}$, связанные соотношением (7), в уравнение (1.1.1.1), получим систему тождеств (1), где $N = p_0 + p_1$. Так как если в уравнении (1.1.1.1) существуют члены с номерами $i > p_0 + p_1$, то в силу (20.0.1) они обращаются в тождественный нуль при данной подстановке.

У системы тождеств (1) с $N = p_0+p_1$ при $r = p_0+p_1$ определитель $\Delta_{p_0+p_1+1}$, когда выполняются условия леммы 1, отличен от нуля.

В этом случае тождества (1) имеют вид $B_{\mu_i}(z) = 0,\ \forall z \in \mathbb{C}$, $i = \overline{0, p_0 + p_1}$, что противоречит заданию уравнения (1.1.1.1) при условии (20.0.1), когда $0 \leqslant p_0 < N,\ 0 < p_1 \leqslant N - p_0$.

Итак, доказана

Лемма 2А. *Пусть в уравнении* (1.1.1.1) *порядки членов связаны соотношением* (20.0.1) *и для существующих среди всего множества чисел* $\varkappa_i$, $i = \overline{0, p_0 + p_1}$, *таких, которые удовлетворяют соотношению* (7.0.1), *соответствующие члены уравнения* (1.1.1.1) *связаны неравенствами* (8.0.1) *при любых натуральных числах* (19.0.1). *Тогда уравнение* (1.1.1.1) *имеет нетривиальные полиномиальные решения* (1.0.1) *не более* $p_0 + p_1$ *различных степеней* m_τ, *удовлетворяющих условиям* (7).

Пусть имеет место соотношение (6). Подставим полиномы (1.0.1) при $\tau = \overline{0, r}$, связанные соотношением (3) при $0 \leqslant p_0 < r$, в уравнение (1.1.1.1). Получим систему тождеств (1), у которой $N = p_0 + p_1$, так как если в уравнении (1.1.1.1) существуют члены с номерами $i > p_0 + p_1$, то в силу (20.0.1) они обращаются в тождественный нуль при данной подстановке.

Система тождеств (1), где $N = p_0 + p_1$, при $r = p_0 + p_1$ имеет определитель $\widehat{\Delta}_{p_0+p_1+1}$, отличный от нуля при выполнении условий леммы 5.0.1. Тогда тождества (1) будут иметь вид $B_{\mu_i}(z) \equiv 0$, $i = \overline{0, p_0 + p_1}$, что противоречит заданию уравнения (1.1.1.1) при условии (20.0.1), когда $0 \leqslant p_0 < N$, $0 < p_1 \leqslant N - p_0$.

Итак, доказана

Лемма 2Б. *Пусть в уравнении* (1.1.1.1) *порядки членов связаны соотношением* (20.0.1) *и для существующих среди всего множества чисел* $\varkappa_i$, $i = \overline{0, p_0 + p_1}$, *таких, которые удовлетворяют соотношению* (7.0.1), *соответствующие члены уравнения* (1.1.1.1) *связаны неравенствами* (8.0.1) *при любых натуральных числах* (19.0.1). *Тогда уравнение* (1.1.1.1) *имеет нетривиальные полиномиальные решения* (1.0.1) *не более* $p_0 + p_1$ *различных степеней* m_τ, *удовлетворяющих условиям* (3) *при* (6).

В общем случае справедлива

Лемма 2. *Пусть в уравнении* (1.1.1.1) *порядки членов связаны соотношением* (20.0.1) *и для существующих среди всего множества чисел* $\varkappa_i$, $i = \overline{0, p_0 + p_1 + \ldots + p_k}$, *таких, которые удовлетворяют соотношению* (7.0.1), *соответствующие члены уравнения* (1.1.1.1) *связаны неравенствами* (8.0.1) *при любых натуральных числах* (19.0.1). *Тогда при* $k = 0$ *и* $k = 1$ *уравнение* (1.1.1.1) *имеет нетривиальные полиномиальные решения* (1.0.1) *не более* $\sum\limits_{j=0}^{k} p_j$ *различных степеней* m_τ, $\tau = \overline{0, r}$, *таких, что*

$$\mathfrak{l}_{\sum\limits_{j=0}^{k} p_j} \leqslant m_r < \mathfrak{l}_{1+\sum\limits_{j=0}^{k} p_j},$$

где $\mathfrak{l}_{1+\sum\limits_{j=0}^{k} p_j} = +\infty$ *при* $\displaystyle\sum_{j=0}^{k} p_j = N$.

Шаг 3. Пусть нетривиальные полиномиальные решения (1.0.1) различнных степенней m_τ уравнения (1.1.1.1) такие, что

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{l}_{p_0} \leqslant m_0 < m_1 < \ldots < m_{p_0} < \mathfrak{l}_{p_0+p_1},\ 0 \leqslant p_0 \leqslant N, \\
\mathfrak{l}_{p_0+p_1} \leqslant m_{p_0+1} < m_{p_0+2} < \ldots < m_{p_0+p_1} < \mathfrak{l}_{p_0+p_1+p_2}, \\
0 < p_1 \leqslant N - p_0,\ \mathfrak{l}_{p_0+p_1+p_2} \leqslant m_{p_0+p_1 1} < m_{p_0+p_1+2} < \ldots < \\
< m_r < \mathfrak{l}_{p_0+p_1+p_2+1},\ 0 < p_2 \leqslant N - (p_0 + p_1),
\end{gathered}
\tag{8}
$$

причём для любого $k = \overline{0, 2}$, если $\sum\limits_{j=0}^{k} p_j = N$, то $\mathfrak{l}_{1+\sum\limits_{j=0}^{k} p_j} = +\infty$; p_0 — такое, что $0 \leqslant p_0 \leqslant r$ или $\{0, 1, \ldots, p_0\} = \varnothing$, а p_1 — такое, что $0 \leqslant p_1 \leqslant r - p_0$ или $\{p_0 + 1, \ldots, p_0 + p_1\} = \varnothing$.

Относительно r, p_0 и p_1 имеем:

$$p_0 = r; \tag{9}$$

$$\{0, 1, \ldots, p_0\} = \varnothing,\ p_1 = r; \tag{10}$$

$$0 \leqslant p_0 < r,\ p_0 + p_1 = r; \tag{11}$$

$$\{0, 1, \ldots, p_0 + p_1\} = \varnothing; \tag{12}$$

$$\{0, 1, \ldots, p_0\} = \varnothing,\ 0 < p_1 < r; \tag{13}$$

$$0 \leqslant p_0 < r,\ \{p_0 + 1, \ldots, p_0 + p_1\} = \varnothing, \tag{14}$$

$$0 \leqslant p_0 < r,\ 0 < p_1 < r,\ 0 < p_0 + p_1 < r. \tag{15}$$

Лемма 3. *Пусть в уравнении* (1.1.1.1) *порядки членов связаны соотношением* (20.0.1) *и для существующих среди всего множества чисел* $\varkappa_i$, $i = \overline{0, p_0 + \ldots + p_k}$, *таких, которые удовлетворяют соотношению* (7.0.1), *соответствующие члены уравнения* (1.1.1.1) *связаны неравенствами* (8.0.1) *при любых натуральных числах* (19.0.1). *Тогда дифференциальное уравнение* (1.1.1.1) *для всех* $k = \overline{0, 2}$ *имеет нетриви-*

альные полиномиальные решения (1.0.1) *не более* $\sum\limits_{j=0}^{k} p_j$ *различных степеней* $m_\tau,\ \tau=\overline{0,r}$, *таких, что*

$$\mathfrak{l}_{\sum\limits_{j=0}^{k} p_j} \leqslant m_r < \mathfrak{l}_{1+\sum\limits_{j=0}^{k} p_j},$$

где $\mathfrak{l}_{1+\sum\limits_{j=0}^{k} p_j} = +\infty$ *при* $\sum\limits_{j=0}^{k} p_j = N.$

Доказательство. При (9) – (11) условия (8) совпадают с условиями (3), и имеет место лемма 2.

Стало быть, имеет место лемма 3 при $k=0$ и $k=1$.

Справедливость леммы 3 при условии (12) устанавливаем на основании леммы 2.0.1, при условиях (13) или (14) — на основании леммы 5.0.1, при условии (15) — на основании леммы 7.0.1.

Поскольку все случаи (9) – (15) рассмотрены, то лемма 3 доказана полностью. ■

Совершенно аналогичными рассуждениями, как и при доказательстве лемм 1 – 3, на основании лемм 2.0.1, 5.0.1 и 7.0.1 доказываем, что в общем случае справедлива

Теорема 1. *Пусть в дифференциальном уравнении* (1.1.1.1) *члены представлены так, что имеет место соотношение* (20.0.1) *и для существующих среди всего множества чисел* $\varkappa_i,\ i=\overline{0,p_0+\ldots+p_k}$, *таких, которые удовлетворяют соотношению* (7.0.1), *соответствующие члены уравнения* (1.1.1.1) *связаны неравенствами* (8.0.1) *при любых натуральных числах* (19.0.1). *Тогда для всех* $k=\overline{0,t}$ *уравнение* (1.1.1.1) *имеет нетривиальные полиномиальные решения* (1.0.1) *не более* $\sum\limits_{j=0}^{k} p_j$ *различных степеней* m_τ, $\tau=\overline{0,r}$, *таких, что*

$$\mathfrak{l}_{\sum\limits_{j=0}^{k} p_j} \leqslant m_r < \mathfrak{l}_{1+\sum\limits_{j=0}^{k} p_j}, \qquad (16)$$

где $\mathfrak{l}_{1+\sum\limits_{j=0}^{k} p_j} = +\infty$ *при* $\sum\limits_{j=0}^{k} p_j = N.$

Следствие 1. *Алгебраическое дифференциальное уравнение* (1.1.1.1) *имеет нетривиальные полиномиальные решения не более* N *различных степеней, если для существующих среди всего множества чисел* $\varkappa_i$ *таких, которые удовлетворяют соотношению* (7.0.1), *соответствующие члены уравнения* (1.1.1.1) *связаны неравенствами* (8.0.1) *при любых натуральных числах* (19.0.1).

Укажем некоторые классы уравнений (1.1.1.1), для которых условия теоремы 1 выполняются.

Рассмотрим уравнение (1.1.1.1) в случае, когда

$$\varkappa_i \neq \varkappa_j,\ i, j = \overline{0, N}\,,\ i \neq j. \tag{17}$$

Условием (17) исключаем возможность выполнения соотношений (7.0.1) и непосредственно из теоремы 1 получаем

Следствие 2. *Если в алгебраическом дифференциальном уравнении* (1.1.1.1) *члены представлены так, что имеет место соотношение* (20.0.1) *и выполняется условие* (17), *то для всех* $k = \overline{0, t}$ *уравнение* (1.1.1.1) *имеет нетривиальные полиномиальные решения* (1.0.1) *не более* $\sum\limits_{j=0}^{k} p_j$ *различных степеней* m_τ, *удовлетворяющих* (16).

Из следствия 2 получаем менее точное, но более простое по формулировке

Следствие 3. *У уравнения* (1.1.1.1), *все члены которого имеют различные размерности, нетривиальные полиномиальные решения имеют не более* N *различных степеней.*

Имеет место и более общий случай, чем сформулированный в следствии 2.

Пусть члены алгебраического дифференциального уравнения (1.1.1.1), связанные соотношением (7.0.1), такие, что в наборах $\left\{\mathfrak{n}_{p_0^\delta}, \mathfrak{n}_{p_1^\delta}, \ldots, \mathfrak{n}_{s^\delta_{j_\delta}}\right\}$ при каждом $\delta \in \{0, 1, \ldots, \lambda\}$ содержится только по одному наибольшему числу

$$\mathfrak{n}_{s^\delta} = \max\{\mathfrak{n}_{p_0^\delta}, \mathfrak{n}_{p_1^\delta}, \ldots, \mathfrak{n}_{s_{j_\delta}^\delta}\}, \ \mathfrak{n}_{s^\delta} = \mathfrak{n}_{s_{\alpha_\delta}^\delta}, \ \mathfrak{n}_{s^\delta} > \mathfrak{n}_{s_{\beta_\delta}^\delta}, \qquad (18)$$
$$\beta_\delta \neq \alpha_\delta, \ \beta_\delta = \overline{0, j_\delta}\,, \ \delta = \overline{0, \lambda}\,.$$

Исключив из уравнения (1.1.1.1) члены с номерами $s_{\beta_\delta}^\delta$, где $\beta_\delta = \overline{0, j_\delta}\,, \ \beta_\delta \neq \alpha_\delta, \ \delta = \overline{0, \lambda}\,,$ получим уравнение

$$\sum_{\eta=0}^{M} B_{\mu_{\zeta_\eta}}(z) \prod_{k=1}^{s_\eta} \left(w^{(\gamma_{k_\eta})}\right)^{\rho_{k_\eta}} = 0, \qquad (19)$$

где $\{\zeta_0, \zeta_0, \ldots, \zeta_M,\} \subset \{M_0, M_1, \ldots, M_N\}, \ M = N - \sum\limits_{\delta=0}^{\lambda} j_\delta.$

В силу соотношений (18) нетривиальные полиномиальные решения уравнения (1.1.1.1) и нетривиальные полиномиальные решения уравнения (19) имеют общие высшие члены. Данное обстоятельство позволяет утверждать, что количество нетривиальных полиномиальных решений различных степеней уравнения (1.1.1.1) совпадает с количеством нетривиальных полиномиальных решений различных степеней уравнения (19). Но уравнение (19) такое, что в силу построения члены его связаны соотношением (17), а значит, на основании следствия 2 устанавливаем количество нетривиальных полиномиальных решений различных степеней уравнения (19) и уравнения (1.1.1.1).

Следствие 4. *Алгебраическое дифференциальное уравнение* (1.1.1.1) *при условиях* (7.0.1) *и* (18) *имеет нетривиальные полиномиальные решения не более*

$$M = N - \sum_{\delta=0}^{\lambda} j_\delta$$

различных степеней.

Теорема 1 может быть применена к дифференциальному уравнению специального вида [63]

$$\sum_{i=0}^{m} A_{\mu_i}(z) \prod_{j=0}^{p} \Biggl(\prod_{k=0}^{s_j} \Bigl(w^{(l_{k_i})} \Bigr)^{\nu_{k_j}} \Biggr)^{\alpha_{j_i}} = \sum_{\tau=0}^{n} B_{\nu_\tau} w^{\gamma_\tau} \prod_{\lambda=0}^{s} \Bigl(w^{(l_\lambda)} \Bigr)^{\nu_\lambda}, \tag{20}$$

где l_{k_j}, ν_{k_j}, α_{j_i}, γ_τ, l_λ, ν_λ суть целые неотрицательные числа такие, что

$$\sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{s_j} \nu_{k_j} \alpha_{j_i} < \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{s_j} \nu_{k_j} \alpha_{j_{i+1}}, \ i = \overline{0, m}, \tag{21}$$

$$\gamma_0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_n. \tag{22}$$

При наличии в уравнении (20) членов с равными размерностями, то есть, связанных соотношением

$$\sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{s_j} \nu_{k_j} \alpha_{j_i} = \gamma_\tau + \sum_{\lambda=0}^{s} \nu_\lambda, \quad i \in \{0, 1, \ldots, m\}, \tau \in \{0, 1, \ldots, n\}, \tag{23}$$

должны выполняться условия

$$l_q = \max_{j=\overline{0,p}} \max_{k=\overline{0,s_j}} \{l_{k_j}\} > \max_{\lambda=\overline{0,s}} \{l_\lambda\} = l_\zeta \tag{24}$$

и

$$\sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{s_i} \delta_{kj} \nu_{k_j} \alpha_{j_i} > \nu_\zeta, \tag{25}$$

где $\delta_{ij} = \left[\begin{array}{ll} 1, & \text{если} \quad l_{k_j} \geqslant l_\zeta; \\ 0, & \text{если} \quad l_{k_j} < l_\zeta. \end{array} \right.$

Отметим, что условия (21) и (22) гарантируют наличие в уравнении (20) не более двух членов с равными размерностями.

Если имеет место хотя бы одно из соотношений (23), то определитель (8.0.1) при (24) и (25) может быть всегда преобразован следующим образом

$$\begin{vmatrix} \widetilde{K}_i^*(m_1) & \widetilde{K}_\tau^*(m_1) \\ \widetilde{K}_i^*(m_2) & \widetilde{K}_\tau^*(m_2) \end{vmatrix} = \widetilde{K}_\tau^*(m_1)\widetilde{K}_\tau^*(m_2) \begin{vmatrix} \varphi(m_1) & 1 \\ \varphi(m_2) & 1 \end{vmatrix},$$

где

$$\varphi(m) = \frac{\widetilde{K}_i^*(m)}{\widetilde{K}_\tau^*(m)}$$

и имеет вид

$$\varphi = m^{\delta_0}(m-1)^{\delta_1}\ldots(m-l_q)^{\delta_q}.$$

Поскольку $m > l_q$, то при $m_2 > m_1$, в силу монотонности положительной функции φ имеют место неравенства (8.0.1).

Таким образом, справедливо

Следствие 5. *Уравнение* (20) *при* (21) − (25) *имеет нетривиальные полиномиальные решения не более* $m+n+1$ *различных степеней.*

Необходимо заметить, что теорема 1, хотя и справедлива для достаточно широкого класса уравнений (1.1.1.1), но всё же не охватывает весь класс.

Пример 1. Уравнение

$$zw'\big(w^{(V)}\big)^2 - 12w^{(IV)}w^{(VI)}w = 0$$

имеет нетривиальные полиномиальные решения

$$w_1 : z \to z^6,\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{и} \quad w_2 : z \to z^{10},\ \forall z \in \mathbb{C},$$

Уравнение [87]

$$zw'\big(w'''\big)^2 - 8ww''w^{(IV)} = 0$$

имеет нетривиальные полиномиальные решения

$$w_1 : z \to z^4,\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{и} \quad w_2 : z \to z^6,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Для обоих этих уравнений условия теоремы 1 не выполняются в силу нарушения неравенств (8.0.1).

Действительно, для первого уравнения определитель

$$\begin{vmatrix} m_1 \prod\limits_{i=0}^{4}(m_1 - i)^2 & \prod\limits_{i=0}^{3}(m_1 - i) \prod\limits_{i=0}^{5}(m_1 - i) \\ m_2 \prod\limits_{i=0}^{4}(m_2 - i)^2 & \prod\limits_{i=0}^{3}(m_2 - i) \prod\limits_{i=0}^{5}(m_2 - i) \end{vmatrix} =$$

$$= m_1^2 m_2^2 (m_1 - 1)^2 (m_2 - 1)^2 (m_1 - 2)^2 (m_2 - 2)^2 (m_1 - 3)^2 \cdot$$

$$\cdot (m_2 - 3)^2 (m_1 - 4)(m_2 - 4) \begin{vmatrix} m_1(m_1 - 4) & m_1 - 5 \\ m_2(m_2 - 4) & m_2 - 5 \end{vmatrix} = 0$$

при $m_1 = 6,\ m_2 = 10,$ а для второго уравнения определитель

$$\begin{vmatrix} m_1^3 (m_1 - 1)^2 (m_1 - 2)^2 & m_1^2 (m_1 - 1)^2 (m_1 - 2)(m_1 - 3) \\ m_2^3 (m_2 - 1)^2 (m_2 - 2)^2 & m_2^2 (m_2 - 1)^2 (m_2 - 2)(m_2 - 3) \end{vmatrix} = 0$$

при $m_1 = 4,\ m_2 = 6.$

Итак, нами приведены примеры уравнений, у которых число полиномиальных нетривиальных решений совпадает с числом членов в уравнении, то есть, нарушаются условия теоремы 1, и количество нетривиальнных полиномиальных решений различных степеней больше N.

Глава IV

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА РИККАТИ – АБЕЛЯ

В предыдущих главах изучены свойства полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений общего вида. В § 4 главы 1 рассмотрены приложения на случай нелинейных уравнений второго и третьего порядков типа Пенлеве.

Если рассматривать дифференциальные уравненния специальных видов, то полиномиальные решения, наряду с общими свойствами, обладают и специфическими. Последние могут значительно расширить представление о полиномиальных решениях, а в сочетании с общими свойствами дать более полную картину.

Остановимся на уравнении вида

$$\frac{dw}{dz} = \sum_{i=0}^{n} P_i(z)w^i,\ n \geqslant 2, \tag{1}$$

где $P_i\colon z \to P_i(z)$ — некоторые функции комплексного переменного z такие, что $P_n(z) \not\equiv 0$.

Если $n = 2$, то уравнение (1) является уравнением Риккати, при $n = 3$ — уравнением Абеля первого рода. Поэтому при $n \geqslant 2$ уравнение (1) будем называть уравнением первого порядка *типа Риккати – Абеля*.

Будем рассматривать алгебраические дифференциальные уравнения типа Риккати – Абеля (1), то есть, когда коэффициенты P_i являются полиномами или рациональными функциями по z. Эти уравнения всегда могут быть записаны в одном из видов

$$\frac{dw}{dz} = \sum_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(z)w^{\nu_i},\ \nu_N \geqslant 2, \tag{2}$$

или

$$A(z)\,\frac{dw}{dz}=\sum_{i=0}^{N}B_{\mu_i}(z)w^{\nu_i},\ \nu_N\geqslant 2, \tag{3}$$

где A и B_{μ_i} — полиномы по z и $A(z)\not\equiv\mathrm{const},\ B_{\mu_N}(z)\not\equiv 0$.

В (2) и (3) полиномы-коэффициенты с лексикографическим расположением членов

$$B_{\mu_i}\colon z\to\beta_i z^{b_i}+\ldots,\ \forall z\in\mathbb{C},\ i=\overline{0,N}, \tag{4}$$

и

$$A\colon z\to\alpha z^a+\ldots,\ \forall z\in\mathbb{C},\ \alpha\neq 0. \tag{5}$$

Будем считать, что

$$\nu_0<\nu_1<\ldots<\nu_N, \tag{6}$$

ибо это будет полезным для дальнейших рассуждений и не нарушает общности рассматриваемых классов уравнений (2) и (3).

Кроме того, будем считать, что в уравнении (3) полиномы-коэффициенты $A, B_{\mu_0}, B_{\mu_1},\ldots,B_{\mu_N}$ не имеют общих нулей, то есть, не существует такого комплексного числа z_0, что

$$A(z_0)=B_{\mu_0}(z_0)=B_{\mu_1}(z_0)=\ldots=B_{\mu_N}(z_0)=0.$$

Такой ситуации можно добиться сокращением обеих частей уравнения (3) на общие множители. В результате получим либо уравнение (2), либо уравнение (3), но с требуемым свойством.

§ 1. Полиномиальные решения уравнения $\frac{dw}{dz} = \sum\limits_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(z)w^{\nu_i}$

Свойство 1. *Уравнение* (2.0.0) *не имеет полиномиальных решений* w_1 *и* w_2 *таких, что* $w_1(z_0) = w_2(z_0)$, *где* z_0 — *некоторое комплексное число.*

Доказательство. Если w_1 и w_2 — полиномиальные решения уравнения (2.0.0) такие, что $w_1(z_0) = w_2(z_0)$, то $w_1(z) \equiv w_2(z)$, ибо в противном случае в точке $z = z_0$ нарушается единственность задачи Коши. ■

Как следствие свойства 1 при условии, что z_0 является нулём полиномов w_1 и w_2, то есть, $w_1(z_0) = w_2(z_0)$, справедливо

Свойство 2. *Любых два полиномиальных решения уравнения* (2.0.0) *не имеют общих нулей, то есть, являются неприводимыми.*

Свойство 3. *Любых два полиномиальных решения уравнения* (2.0.0) *отличаются на постоянную, то есть, если полиномы* w_1 *и* w_2 *являются решениями уравнения* (2.0.0), *то при любом* z *из поля* $\mathbb{C}$ *разность* $w_2(z) - w_1(z) = C$, *где* C *есть некоторая постоянная.*

Доказательство. Пусть w_1 и w_2 — различные полиномиальные решения уравнения (2.0.0). Тогда

$$w_2(z) - w_1(z) \equiv \text{const}.$$

Так как, если допустить, что

$$w_2(z) - w_1(z) = P(z),$$

где P — полином степени $\deg P(z) \geqslant 1$, то в силу того, что полином, отличный от постоянной, всегда имеет хотя бы один нуль, скажем z_0, получаем равенство $w_2(z_0) - w_1(z_0) = 0$, которое противоречит свойству 1. ■

Свойство 4. *Если в уравнении* (2.0.0) *показатель степени* $\nu_0 \geqslant 1$, *то любое его полиномиальное решение является постоянной.*

Данное свойство следует из свойства 3 и того, что $w(z) \equiv 0$ является решением уравнения (2.0.0) при $\nu_0 \geqslant 1$.

Последнее получаем из более общего утверждения, которое сформулируем в виде свойства.

Свойство 5. *Для того чтобы полином* $w\colon z \to a$, $\forall z \in \mathbb{C}$, *где* a *— постоянная, являлся решением уравнения* (2.0.0), *необходимо и достаточно, чтобы это уравнение имело вид*

$$\frac{dw}{dz} = (w-a)Q(z,w), \tag{1}$$

где Q *— полином переменных* z *и* w.

Доказательство. Если $w\colon z \to a$, $\forall z \in \mathbb{C}$, — решение уравнения (2.0.0), то

$$\sum_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(z) a^{\nu_i} \equiv 0,$$

то есть, уравнение (2.0.0) имеет вид (1).

А то, что $w\colon z \to a$, $\forall z \in \mathbb{C}$, решение уравнения (1) является вполне очевидным фактом. ■

Из свойств 3 и 5 следует

Свойство 6. *Если уравнение* (2.0.0) *имеет хотя бы одно полиномиальное решение в виде постоянной, то все возможные полиномиальные решения его также будут полиномами нулевой степени. А для того чтобы полиномы*

$$w\colon z \to a_j, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ j = \overline{1, r},$$

где a_j *— постоянные, были решениями уравнения* (2.0.0), *необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид*

$$\frac{dw}{dz} = A(z,w) \prod_{j=1}^{r} (w - a_j)^{\gamma_j},$$

где A — полином по z и w такой, что $A(z,a)\not\equiv 0$ при любой постоянной a.

Уравнение (2.0.0), естественно, может иметь полиномиальные решения, отличные от постоянной.

Из свойства 4 следует необходимое условие наличия полиномиальных решений степени, большей или равной единице.

Свойство 7. *Если дифференциальное уравнение* (2.0.0) *имеет полиномиальное решение, отличное от постоянной, то $\nu_0=0$.*

Из свойства 3 не зависимо от того, идёт ли речь о полиномиальных решениях в виде постоянных или отличных от постоянной, следует

Свойство 8. *У всех полиномиальных решений уравнения* (2.0.0) *одинаковая степень.*

Укажем некоторые свойства степени полиномиальных решений дифференциального уравнения (2.0.0).

Свойство 9. *Степень m полиномиальных решений уравнения* (2.0.0) *не превышает числа b_0+1, то есть,*

$$m\leqslant b_0+1. \tag{2}$$

Доказательство. Если $\nu_0\geqslant 1$, то в силу свойства 4 степень полиномиальных решений равна нулю, и стало быть, не превышает числа b_0+1.

Пусть $\nu_0=0$. Допустим противное: у полиномиальных решений степень $m=b_0+\eta$, где $\eta>1$.

При $\nu_0=0$ уравнение (2.0.0) запишем в виде

$$\frac{w'-B_{\mu_0}(z)}{w}=\sum_{j=1}^{N} B_{\mu_j}(z)w^{\nu_j-1}, \tag{3}$$

где $\nu_1\geqslant 1$.

Тогда частное $\dfrac{w'(z)-B_{\mu_0}(z)}{w(z)}$ не должно иметь полюсов.

Однако при $\eta>1$ степень $\deg\bigl(w'(z)-B_{\mu_0}(z)\bigr)=b_0+\eta-1$.

Стало быть, частное имеет хотя бы один полюс.

Получили противоречие. ■

Свойство 10. *Полиномиальные решения уравнения* (2.0.0) *степени* $m = b_0 + 1$ *содержатся в семействе полиномов*

$$\int B_{\mu_0}(z)dz + C, \quad C = \text{const}.$$

Доказательство. Пусть полиномиальное решение w уравнения (2.0.0) имеет степень $\deg w(z) = b_0 + 1$. Тогда, по свойству 7, в уравнении (2.0.0) показатель степени $\nu_0 = 0$, и оно приводится к уравнению (3).

Уравнение (3) обращается в тождество, в правой части которого расположен полином, а в левой части — рациональная функция $\dfrac{w'(z) - B_{\mu_0}(z)}{w(z)}$. У числителя $\deg(w'(z) - B_{\mu_0}(z)) \leqslant b_0$, а у знаменателя $\deg w(z) = b_0 + 1$.

Поскольку в тождестве левая часть — полином, то числитель $w'(z) - B_{\mu_0}(z) \equiv 0$.

Отсюда устанавливаем свойство 10. ■

Свойство 11. *Степень* m *полиномиальных решений уравнения* (2.0.0) *при* $\nu_0 = 0$ *удовлетворяет неравенствам*

$$m \leqslant \max\left\{\frac{b_0 - b_N}{\nu_N}, \frac{b_1 - b_N}{\nu_N - \nu_1}, \ldots, \frac{b_{N-2} - b_N}{\nu_N - \nu_{N-2}}, \frac{b_{N-1} - b_N}{\nu_N - \nu_{N-1}}\right\} \qquad (4)$$

и

$$m \geqslant \min\left\{\frac{b_0 - b_1}{\nu_1}, \frac{b_0 - b_2}{\nu_2}, \ldots, \frac{b_0 - b_{N-1}}{\nu_{N-1}}, \frac{b_0 - b_N}{\nu_N}\right\}. \qquad (5)$$

Данное свойство соответствует следствиям 1.2.2.1 и 2.2.2.1

При $b_j < b_N$ для всех $j = \overline{0, N-1}$ в наборе (4) все числа отрицательные, а значит, справедливо

Свойство 12. *Если* $b_j < b_N$, $j = \overline{0, N-1}$, *то уравнение* (2.0.0) *при* $\nu_0 = 0$ *не имеет полиномиальных решений.*

При $b_j \leqslant b_N$ для всех $j = \overline{0, N-1}$ в наборе (4) содержатся только неположительные числа, а значит, справедливо

Свойство 13. *Если* $b_j \leqslant b_N$, $j = \overline{0, N-1}$, *то полиномиальными решениями уравнения* (2.0.0) *при* $\nu_0 = 0$ *будут только постоянные.*

Аналогом теоремы 1.2.1.1 для уравнения (2.0.0) является

Свойство 14. *Все степени полиномиальных решений уравнения* (2.0.0) *при* $\nu_0 = 0$ *содержатся в наборе*

$$\left\{ \frac{b_i - b_j}{\nu_j - \nu_i} \right\}, \ \ i, j = \overline{0, N}, \ i \neq j, \tag{6}$$

причём в ноборе (6) *содержатся лишь целые неотрицательные числа.*

Свойство 14 характеризует лишь то, что в наборе

$$\{b_0, b_1 - \nu_1 m, \, b_2 - \nu_2 m, \, \ldots, b_{N-1} - \nu_{N-1} m, \, b_N - \nu_N m\} \tag{7}$$

существуют по крайней мере два одинаковых числа.

Если число m является степенью полиномиального решения уравнения (2.0.0) при $\nu_0 = 0$, то в наборе (7) существует не менее двух одинаковых и наибольших чисел (теорема 2.2.1.1).

Отсюда следует

Свойство 15. *Если число* m *из набора* (6) *является степенью полиномиальных решений* (2.0.0) *при* $\nu_0 = 0$, *то в наборе* (7) *при данном* m *существуют не менее двух одинаковых наибольших чисел.*

Подобным образом на основании свойства 4 и теоремы 2.2.1.1 получаем

Свойство 16. *Уравнение* (2.0.0) *при* $\nu_0 \geqslant 1$ *всегда имеет решение* $w(z) \equiv 0$ *и имеет полиномиальные решения в виде постоянной, отличной от нуля, если в наборе*

$$\{b_0, \, b_1, \, b_2, \ldots, b_N\} \tag{8}$$

существуют не менее двух одинаковых наибольших чисел.

Пусть в наборе (8) одинаковыми и наибольшими будут числа

$$b_{k_0},\, b_{k_1}, \ldots, b_{k_p},\ 1 \leqslant p \leqslant N,\ k_i \in \{0, 1, \ldots, N\},\ i = \overline{0, p}\,,$$

то полином $w\colon z \to a, \forall z \in \mathbb{C},$ где a — постоянная, отличная от нуля, является решением уравнения (2.0.0) при $\nu_0 \geqslant 1,$ если число a будет корнем уравнения

$$\beta_{k_0} a^{\nu_{k_0} - \nu_{k_\delta}} + \beta_{k_1} a^{\nu_{k_1} - \nu_{k_\delta}} + \ldots + \beta_{k_l} a^{\nu_{k_p} - \nu_{k_\delta}} = 0, \qquad (9)$$

где $\nu_{k_\delta} = \min\limits_{i=\overline{0,p}} \{\nu_{k_i}\},$ ибо $w\colon z \to a, \forall z \in \mathbb{C},$ является решением уравнения (2.0.0) при $\nu_0 \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(z) a^{\nu_i} \equiv 0.$

Тем самым доказано

Свойство 17. *Пусть в наборе* (8) *одинаковыми и наибольшими будут числа* $b_{k_0} = b_{k_1} = \ldots = b_{k_p},\ 1 \leqslant p \leqslant N,$ $k_i \in \{0, 1, \ldots, N\},\ i = \overline{0, p}\,.$ *Тогда, если* $w\colon z \to a, \forall z \in \mathbb{C},$ *где* $a \neq 0,$ *является решением уравнения* (2.0.0) *при* $\nu_0 \geqslant 1,$ *то* a *является корнем уравнения* (9).

Рассуждая, как при доказательстве свойства 17, и принимая во внимание свойства 3 и 7, получаем

Свойство 18. *Пусть в наборе* (7) *при некотором* $m > 0$ *одинаковыми и наибольшими будут числа, соответствующие членам уравнения* (2.0.0) *с номерами* $k_0, k_1, \ldots, k_p,$ $1 \leqslant p \leqslant N,\ k_i \in \{0, 1, \ldots, N\},\ i = \overline{0, p}\,.$ *Тогда коэффициент* α_m *для полиномиальных решений* (1.2.1.1) *степени* m *уравнения* (2.0.0) *при* $\nu_0 = 0$ *будет общим и является корнем алгебраического уравнения*

$$\beta_{k_0} \alpha_m^{\nu_{k_0} - \nu_{k_\delta}} + \beta_{k_1} \alpha_m^{\nu_{k_1} - \nu_{k_\delta}} + \ldots + \beta_{k_p} \alpha_m^{\nu_{k_p} - \nu_{k_\delta}} = 0,$$

где $\nu_{k_\delta} = \min\limits_{i=\overline{0,p}} \{\nu_{k_i}\}.$

Свойство 19. *Любой нуль кратности* ρ_0, *большей или равной двум, полиномиального решения уравнения* (2.0.0) *при* $\nu_0 = 0$ *является нулём кратности* $\rho_0 - 1$ *полинома* B_{μ_0}.

Доказательство. Уравнение (2.0.0) при $\nu_0 = 0$ представим в виде

$$B_{\mu_0}(z) = w' + wP(z, w), \tag{10}$$

где

$$P(z,w) = -\Big(B_{\mu_1}(z)w^{\nu_1 - 1} + B_{\mu_2}(z)w^{\nu_2 - 1} + \ldots + B_{\mu_N}(z)w^{\nu_N - 1}\Big),$$

из которого следует, что нуль полинома-решения w кратности $\rho_0 \geqslant 2$ является нулём полинома B_{μ_0} кратности $\rho_0 - 1$. ■

Из свойства 19 следует

Свойство 20. *Нули* $z = z_\tau$ *кратности* $\rho_\tau \geqslant 2$ *полиномиального решения уравнения* (2.0.0) *при* $\nu_0 = 0$ *содержатся во множестве нулей полинома* B_{μ_0}, *причём* $\rho_\tau = s_\tau + 1$, *где* s_τ *— кратность нуля* $z = z_\tau$ *полинома* B_{μ_0}.

Свойство 21. *Простые нули полиномиального решения уравнения* (2.0.0) *при* $\nu_0 = 0$ *не являются нулями полинома-коэффициента* B_{μ_0}.

Доказательство. Учитывая то, что полиномиальное решение имеет вид

$$w\colon z \to (z - z_0)\widetilde{w}(z), \ \forall z \in \mathbb{C},$$

где $\widetilde{w}(z_0) \neq 0$, из уравнения (10) получаем тождество

$$-\widetilde{w}(z) \equiv -B_{\mu_0}(z) + (z - z_0)\big(\widetilde{w}'(z) + \widetilde{w}(z)P(z, (z - z_0), \widetilde{w}(z))\big).$$

Если бы $z = z_0$ было нулём полинома B_{μ_0}, то $z = z_0$ было бы нулём и полинома $\widetilde{w}$.

Получили противоречие. ■

Из свойств 20 и 21 следует

Свойство 22. *Если* $B_{\mu_0}(z) \equiv \mathrm{const}$, *то у полиномиальных решений уравнения* (2.0.0) *при* $\nu_0 = 0$ *нули простые.*

Свойство 23. *Для того чтобы уравнение* (2.0.0) *при* $\nu_0 = 0$ *имело полиномиальное решение* w, *необходимо, чтобы рациональная функция* $\dfrac{B_{\mu_0}}{w}$ *всегда при* $w(z) \not\equiv \mathrm{const}$ *имела только простые полюса с вычетами, равными кратности соответствующего нуля полиномиального решения* w.

Доказательство. Пусть полином w, отличный от постоянной, является решением уравнения (2.0.0) при $\nu_0 = 0$. Тогда из уравнения (10) получаем тождество

$$\frac{B_{\mu_0}(z)}{w(z)} \equiv \frac{w'(z)}{w(z)} + P(z, w(z)). \qquad (11)$$

Поскольку у производной w' кратность любого нуля полинома w понижается на единицу, то рациональная функция в правой части тождества (11) имеет только простые полюса, которые являются нулями полиномиального решения w.

Поэтому функция $\dfrac{B_{\mu_0}}{w}$ является рациональной с простыми полюсами в нулях полинома-решения w.

Пусть $z = z_0$ является нулём полинома w кратности $\rho_0 \geqslant 1$, то есть,

$$w\colon z \to (z - z_0)^{\rho_0}\, \widetilde{w}(z),\ \forall z \in \mathbb{C},\ \widetilde{w}(z_0) \neq 0.$$

Тогда точка $z = z_0$ является простым полюсом функции $\dfrac{w'}{w}$ с вычетом

$$\operatorname*{res}_{z_0} \frac{w'(z)}{w(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{(z - z_0) w'(z)}{w(z)} = \rho_0.$$

В силу тождества (11)

$$\operatorname*{res}_{z_0} \frac{B_{\mu_0}(z)}{w(z)} = \rho_0. \blacksquare$$

Свойство 24. *Уравнение* (2.0.0) *имеет не более* ν_N *полиномиальных решений.*

Доказательство. Пусть w_1 — известное полиномиальное решение уравнения (2.0.0). Тогда любое другое полиномиальное решение согласно свойству 3 находится по формуле

$$w(z) = w_1(z) + C, \ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{12}$$

где C — постоянная.

Подставляя (12) в дифференциальное уравнение (2.0.0), получаем, что постоянные C находятся из уравнения

$$\sum_{k=0}^{N-1} \mathfrak{B}_{\mu_k}(z) C^{s_k} = 0,$$

где $s_{N-1} = \nu_N - 1$; $\mathfrak{B}_{\mu_k}$ — полиномы, причём $\mathfrak{B}_{\mu_N}(z) = B_{\mu_N}(z)$.

Стало быть, полиномиальных решений у уравнения (2.0.0) не более ν_N. ■

Свойство 25. *Пусть в наборе* (8) *одинаковыми и наибольшими будут числа* $b_{k_0} = b_{k_1} = \ldots = b_{k_p}$, $1 \leqslant p \leqslant N$, $k_i \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $i = \overline{0, p}$. *Тогда уравнение* (2.0.0) *при* $\nu_0 \geqslant 1$ *имеет не более* $\nu_{k_\lambda} - \nu_{k_\delta} + 1$, *где* $\nu_{k_\lambda} = \max\limits_{i=\overline{0,p}} \{\nu_{k_i}\}$, $\nu_{k_\delta} = \min\limits_{i=\overline{0,p}} \{\nu_{k_i}\}$, *полиномиальных решений.*

Утверждение следует из свойства 17, поскольку уравнение (9) имеет не более $\nu_{k_\lambda} - \nu_{k_\delta}$ решений, отличных от нулевого.

Свойство 26. *Уравнение* (2.0.0) *может иметь только два линейно независимых полиномиальных решения, причём их степень больше или равна единице, а* $\nu_0 = 0$.

Доказательство. Если $\nu_0 \geqslant 1$, то согласно свойству 4 полиномиальными решениями уравнения (2.0.0) могут быть только постоянные, а, стало быть, имеет место линейная зависимость.

Пусть $\nu_0 = 0$ и у уравнения (2.0.0) существуют два полиномиальных решения w_1 и w_2, степени которых согласно свойству 8 одинаковы. Будем считать, что $\deg w_1(z) = \deg w_2(z) \geqslant 1$.

Составим линейную комбинацию $\alpha w_1(z) + \beta w_2(z) \equiv 0$, где α и β — некоторые постоянные. По свойству 3, полиномиальное решение $w_2(z) = w_1(z) + C,$ где C — постоянная. При этом составленное тождество будет иметь вид $(\alpha+\beta)w_1(z) + \beta C \equiv 0.$

Положим, что полином w_1 имеет лексикографическое расположение членов (1.2.1.1), где $m \geqslant 1.$ Тогда

$$(\alpha+\beta)\alpha_m z^m + (\alpha+\beta)\alpha_{m-1} z^{m-1} + \ldots +$$

$$+ (\alpha+\beta)\alpha_1 z + (\alpha+\beta)\alpha_0 + \beta C \equiv 0$$

при $m \geqslant 1,$ что возможно, если $\alpha+\beta = 0,\ \beta C = 0.$

Поскольку $C \neq 0,$ ибо в противном случае полиномы w_1 и w_2 совпадают, то $\alpha = \beta = 0,$ что доказывает линейную независимость w_1 и w_2.

Пусть теперь уравнение (2.0.0) при $\nu_0 = 0$ имеет $p \geqslant 3$ полиномиальных решения $w_j,\ j = \overline{0,p}\,,$ степени которых согласно свойству 8 одинаковы и $\deg w_j(z) \geqslant 1.$

Составим линейную комбинацию

$$\sum_{j=1}^{p} \beta_j w_j(z) \equiv 0,\ p \geqslant 3,$$

где β_j — некоторые числа.

На основании свойства 3

$$w_k(z) = w_1(z) + C_k,\ k = \overline{2,p}\,,$$

где C_k — постоянные, неравные между собой и отличные от нуля.

Тогда составленное тождество будет иметь вид

$$w_1(z) \sum_{j=1}^{p} \beta_j + \sum_{k=2}^{p} C_k \beta_k \equiv 0$$

и выполняется, если только $\sum\limits_{j=0}^{p} \beta_j = 0$ и $\sum\limits_{k=2}^{p} C_k \beta_k = 0.$

Поскольку $p \geqslant 3$, то всегда можно указать числа β_j, $j=\overline{1,p}$, не равные одновременно нулю, когда будут иметь место эти два равенства.

Например, можем считать, что

$$\beta_2 = -\sum_{s=3}^{p} \frac{C_s\beta_s}{C_2}, \quad \beta_1 = \sum_{s=3}^{p} \frac{\beta_s(C_s - C_2)}{C_2}\,.$$

Это и означает линейную зависимость полиномиальных решений при $p \geqslant 3$, что и доказывает свойство 26. ■

При доказательстве свойства 26, рассматривая случай наличия двух полиномиальных решений, отличных от постоянной, мы, по сути, доказали

Свойство 27. *При* $\nu_0 = 0$ *полиномиальные решения степени, большей или равной единице, дифференциального уравнения* (2.0.0) *являются попарно линейно независимыми.*

Рассмотрим способ построения полиномиальных решений уравнения (2.0.0) в целом.

Положим, что в наборе (7) при некотором m одинаковыми и наибольшими будут числа с номерами

$$\mu_{k_0}, \mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_p}, \ 1 \leqslant p \leqslant N, \ k_i \in \{0, 1, \ldots, N\}, \ i = \overline{0,p}\,.$$

Сумму

$$\sum_{i=0}^{p} B_{\mu_{k_i}}(z) w^{\lambda_{k_i}}$$

произвольным образом разобьём на два слагаемых:

$$\begin{gathered} A(z)\mathfrak{C}^l(z,w)\mathfrak{D}_1^\delta(z,w) \equiv \\ \equiv B_{\mu_{t_0}}(z)w^{\nu_{t_0}} + B_{\mu_{t_1}}(z)w^{\nu_{t_1}} + \ldots + B_{\mu_{t_\lambda}}(z)w^{\nu_{t_\lambda}}, \\ B(z)\mathfrak{C}^l(z,w)\mathfrak{D}_2^\delta(z,w) \equiv \\ \equiv B_{\mu_{\tau_0}}(z)w^{\nu_{\tau_0}} + B_{\mu_{\tau_1}}(z)w^{\nu_{\tau_1}} + \ldots + B_{\mu_{\tau_s}}(z)w^{\nu_{\tau_s}}, \end{gathered} \tag{13}$$

где $\{t_0, t_1, \ldots, t_\lambda\} \cup \{\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_s\} = \{k_0, k_1, \ldots, k_p\}$, $t_i \neq \tau_j$, $i = \overline{0, \lambda}$, $j = \overline{0, s}$, с требованием, чтобы

$$\deg\bigl(A(z)\mathfrak{C}^l(z, w(z))\mathfrak{D}_1^\delta(z, w(z))\bigr) =$$

$$= \deg\bigl(B(z)\mathfrak{C}^l(z, w(z))\mathfrak{D}_2^\delta(z, w(z))\bigr) =$$

$$= \deg\Bigl(B_{\mu_{t_j}}(z)w^{\nu_{t_j}}(z)\Bigr),\ j \in \{0, 1, \ldots, \lambda\}.$$

Заметим, что разбиение (13) в уравнении (2.0.0) аналогично разбиению (3.0.1.2) уравнения (1.0.1.2), и всегда допустимо.

В принятых обозначениях, как следствие теоремы 1.0.1.2, справедливо

Свойство 28. *Уравнение* (2.0.0) *при* $\nu_0 = 0$ *имеет полиномиальное решение* w *с показателем степени* m, *при котором в наборе* (7) *одинаковыми и наибольшими будут числа с номерами* $\mu_{k_0}, \ldots, \mu_{k_p}$, $1 \leqslant p \leqslant N$, $k_i \in \{0, 1, \ldots, N\}, i = \overline{0, p}$, *если этот полином является решением уравнения*

$$\mathfrak{C}(z, w) = 0 \tag{14}$$

или решением хотя бы одного из уравнений

$$\mathfrak{D}_1(z, w) - \varepsilon_t S(z)\mathfrak{D}_2(z, w) = \varepsilon_t \mathfrak{P}(z),\ t = \overline{1, \delta}, \tag{15}$$

где ε_t *— корни уравнения* $\varepsilon^\delta = 1$, $\mathfrak{P}$ *— некоторый полином с показателем степени* $\mathfrak{p}$, *определяемым соотношением*

$$\begin{gathered}\mathfrak{p} = \max\bigl\{m - 1, q + \ell\mathfrak{C}(m) + \delta\mathfrak{D}_2(m), \max_{j=\overline{p+1, N}}\bigl\{l_{k_j} + \nu_{k_j} m\bigr\}\bigr\} - \\ - a - \ell\mathfrak{C}(m) - (\delta - 1)(\mathfrak{D}_2(m) + s),\end{gathered} \tag{16}$$

причём, если $\mathfrak{p} < 0$, *то* $\mathfrak{P}(z) \equiv 0$;

$$S(z) = \left[\Bigl(-\frac{B(z)}{A(z)}\Bigr)^{\frac{1}{\delta}}\right],\ \deg A(z) = a \leqslant b = \deg B(z),$$

$$B(z) = -A(z)S^{\delta} - Q(z),\ s = \deg S(z),\ q = \deg Q(z)$$

Если полином w *есть решение уравнения* (14), *то он является решением уравнения* (2.0.0) *при* $\nu_0 = 0$ *тогда и только тогда, когда он — решение уравнения*

$$w' = \sum_{j=p+1}^{N} B_{\mu_{k_j}}(z) w^{\nu_{k_j}}. \tag{17}$$

Если полином w *является решением хотя бы одного из уравнений* (15), *то для того, чтобы этот полином был решением уравнения* (2.0.0) *при* $\nu_0 = 0$, *необходимо и достаточно, чтобы он был решением уравнения*

$$w' = -Q(z)\mathfrak{C}^{\ell}(z,w)\mathfrak{D}_2^{\delta}(z,w) + \sum_{j=p+1}^{N} B_{\mu_{k_j}}(z) w^{\nu_{k_j}}. \tag{18}$$

В качестве примера рассмотрим алгебраическое дифференциальное уравнение Риккати

$$y' = B_0(z) + B_1(z)y + B_2(z)y^2, \tag{19}$$

где $B_i, i = \overline{0,2}$, — полиномы комплексного переменного z.

С помощью преобразования

$$y = \frac{1}{B_2(z)}\, w - \frac{B_2(z)B_1(z) + B_2'(z)}{2B_2^2(z)}$$

уравнение (19) приводим к виду

$$w' = I(z) + w^2, \tag{20}$$

где I — либо полином, либо рациональная функция

$$I(z) = \frac{4B_2^3(z)B_0(z) - B_2^2(z)B_1^2(z) + 2B_2^2(z)B_1'(z)}{4B_2^2(z)} -$$

$$-\frac{2B_2(z)B_2'(z)B_1(z) + 3(B_2'(z))^2 + 2B_2(z)B_2''(z)}{4B_2^2(z)}\,.$$

Если в уравнении (20) свободный член I — полином, то как следствие свойства 28 справедливо

Свойство 29. *Если в каноническом уравнении Риккати* (20) *свободный член I — полином чётной степени, то не существует других полиномиальных решений, отличных от*

$$w\colon z \to \pm\left[\sqrt{-I(z)}\,\right],\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Если I — полином нечётной степени, то уравнение (20) *не имеет полиномиальных решений вовсе.*

Впервые это свойство было получено в [189].

Если I — рациональная функция, то полиномиальных решений у уравнения (20) нет, так как

$$I(z) \equiv w'(z) - w^2(z).$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение [37]

$$\begin{gathered} w' = z^2(2z^{11} - z^7 + 3) - z^7(2z^8 + 1)w^2 + w^3 - \\ - z(2z^8 + 1)w^4 + 2z^6 w^5 + 2w^7. \end{gathered} \tag{21}$$

В соответствии со свойством 14 составляем набор из целых неотрицательных чисел $\{0, 1, 3, 15\}$.

При $m = 0$ набор (7) для уравнения (21) запишется так: $\{13, 15, 0, 9, 6, 0\}$, а при $m = 1$ — так: $\{13, 17, 3, 13, 11, 7\}$. В соответствии со свойством 15 числа $m = 0$ и $m = 1$ не могут быть показателями степени полиномиальных решений уравнения (21).

При $m = 3$ набор (7) для уравнения (21) запишем так: $\{13, 21, 9, 21, 21, 21\}$, то есть, $m = 3$ может быть показателем степени полиномиального решения w (свойство 15).

В соответствии с (13) уравнение (21) запишем в виде

$$(z^6 + w^2)w^2\{2w^3 - z(2z^8 + 1)\} = w' - z^2(2z^{11} - z^7 + 3) - w^3, \tag{22}$$

где

$$A(z) = 2,\ B(z) = -z(2z^8+1),\ \mathfrak{C}(z,w) = w^2(z^2+w^2),$$

$$\mathfrak{D}_1(z,w) = w,\ \mathfrak{D}_2(z,w) = 1,\ \delta = 3.$$

Уравнение (14) имеет вид

$$w^3(z^6+w^2) = 0,$$

полиномиальными решениями с показателем степени $m = 3$ которого являются

$$w_1(z) = iz^3 \quad \text{и} \quad w_2(z) = -iz^3.$$

Но эти полиномы не являются решениями уравнения

$$w' = z^2(2z^{11} - z^7 + 3) + w^3,$$

соответствующего уравнению (17). Значит, в силу свойства 28 полиномы $w_1(z) = iz^3$ и $w_2(z) = -iz^3$ не являются решениями уравнения (21).

Для отыскания полиномиальных решений уравнения (21), отличных от $w(z) = \pm iz^3$, в соответствии с принятыми условными обозначениями, находим: $S(z) = z^3$, $Q(z) = z$, $\mathfrak{C}(3) = 12$, $\mathfrak{D}_2(3) = 0$, $s = 3$.

Тогда по (16) число $\mathfrak{p} = -5 < 0$.

Согласно свойству 28 уравнения (15) для (22) имеют вид

$$w(z) = \varepsilon_t z^3,\ t = \overline{1,3}\,,$$

и удовлетворяют тождеству

$$3\varepsilon_t z^2 \equiv z^2(2z^{11} - z^7 + 3) + (\varepsilon_t z^3)^3 - z(\varepsilon_t z^3)^2(z^6 + (\varepsilon_t z^3)^2),$$

соответствующему (18), лишь при $\varepsilon_t = 1$.

Итак, $w(z) = z^3$ в силу свойства 28 является решением уравнения (21). Это единственное полиномиальное решение степени $m = 3$.

На основании свойства 8 заключаем, что число $m = 15$ показателем степени полиномиального решения уравнения (21) быть не может (такой же вывод можно сделать и на основании свойств 3, 11, 15).

Итак, дифференциальное уравнение (21) имеет одно полиномиальное решение $w(z) = z^3$.

§ 2. Полиномиальные решения уравнения $A(z)\,\dfrac{dw}{dz} = \sum\limits_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(z) w^{\nu_i}$

Свойство 1. *Уравнение* (3.0.0) *не имеет различных полиномиальных решений* w_1 *и* w_2 *таких, что* $w_1(z_0) = w_2(z_0)$, *а* $A(z_0) \neq 0$, *где* z_0 *— некоторое комплексное число.*

Доказательство. Если полиномы w_1 и w_2 — различные решения уравнения (3.0.0) такие, что $w_1(z_0) = w_2(z_0)$, то в точке $z = z_0$ нарушается единственность задачи Коши. Последнее возможно для уравнения (3.0.0) лишь в точках $z = z_0$, являющихся нулями полинома A, то есть, при $A(z_0) = 0$.

Если потребовать, что $A(z_0) \neq 0$, то решений w_1 и w_2, для которых $w_1(z_0) = w_2(z_0)$, у уравнения (3.0.0) нет. ■

Свойство 2. *Общими нулями полиномиальных решений уравнения* (3.0.0) *будут лишь нули полинома* A.

Если бы различные полиномиальные решения уравнения (3.0.0) w_1 и w_2 имели хотя бы один общий нуль, скажем, $z = z_0$, такой, что $A(z_0) \neq 0$, то наблюдалось бы противоречие со свойством 1.

Свойство 3. *Нули любого полиномиального решения* $w(z) \not\equiv \mathrm{const}$ *уравнения* (3.0.0) *при* $\nu_0 \geqslant 1$ *содержатся в множестве нулей полинома* A.

Доказательство. Если $\nu_0 \geqslant 1$, то в силу соотношения (6.0.0) уравнение (3.0.0) имеет вид

$$A(z)w' = w^{\nu_0}\left(B_{\mu_0}(z) + \sum_{j=1}^{N} B_{\mu_j}(z) w^{\nu_j - \nu_0}\right). \tag{1}$$

Пусть полином $w(z) \not\equiv \mathrm{const}$ является решением уравнения (1). Тогда уравнение (1) при $w = w(z)$ обращается в тождество, выполнив почленное деление которого на $w^{\nu_0}(z)$, получим следующую ситуацию: в правой части расположен полином

$$
B_{\mu_0}(z)+\sum_{j=1}^{N} B_{\mu_j}(z)(w(z))^{\nu_j-\nu_0},
$$

так как $\nu_j-\nu_0>0$ для всех $j=\overline{1,N}$; в левой части расположена функция $A\dfrac{w'}{w^{\nu_0}}$, которая должна быть также полиномом.

Последнее возможно, если только нули полинома-решения w являются нулями полинома-коэффициента A, ибо каждый простой нуль полинома w не является нулём полинома w', а всякий нуль кратности $k>1$ полинома w является нулём полинома w' кратности $k-1$. Это и доказывает свойство 3. ■

Свойство 4. *Общими нулями хотя бы двух полиномиальных решений уравнения* (3.0.0) *при* $\nu_0=0$ *являются лишь общие нули полиномов* A *и* B_{μ_0}.

Доказательство. При $\nu_0=0$ уравнение (3.0.0) имеет вид

$$
A(z)w'=B_{\mu_0}(z)+w\sum_{j=1}^{N} B_{\mu_j}(z)w^{\nu_j-1}. \tag{2}
$$

Пусть полиномы w_1 и w_2, отличные от постоянной, являются решениями уравнения (2) и имеют общий нуль в точке $z=z_0$. Тогда в силу свойства 2 $A(z_0)=0$.

При $w=w_1(z)$ уравнение (2) обращается в тождество, которое при $z=z_0$ преобразуется в равенство $B_{\mu_0}(z_0)=0$, что и доказывает свойство 4. ■

Свойство 5. *Если в уравнении* (3.0.0) *при* $\nu_0=0$ *коэффициенты* A *и* B_{μ_0} *являются взаимно простыми, то и все его полиномиальные решения взаимно простые.*

Данное свойство 5 является непосредственнным следствием свойства 4.

Любые два полиномиальных решения уравнения (3.0.0) *отличаются либо на постоянную, либо на полином, нули которого содержатся в множестве нулей полинома* A.

Доказательство. Пусть полиномы w_1 и w_2 являются решениями уравнения (3.0.0). Тогда при $w=w_1(z)$ и $w=w_2(z)$ уравнение (3.0.0) обращается в тождества

$$A(z)w_1'(z)\equiv\sum_{i=0}^{N}B_{\mu_i}(z)w_1^{\nu_i}(z)$$

и

$$A(z)w_2'(z)\equiv\sum_{i=0}^{N}B_{\mu_i}(z)w_2^{\nu_i}(z).$$

Вычитая из первого тождества второе и выполняя почленное деление на $u(z)=w_1(z)-w_2(z)$, получим

$$\frac{A(z)u'(z)}{u(z)}\equiv\sum_{j=\delta_0^{\nu_0}}^{N}B_{\mu_j}(z)\sum_{p=1}^{\nu_j}\bigl(w_1(z)\bigr)^{\nu_j-1}\bigl(w_2(z)\bigr)^{\ell-1},\qquad(3)$$

где $\delta_0^{\nu_0}$ — символ Кронекера.

Поскольку в правой части тождества (3) расположен полином, то частное $\dfrac{Au'}{u}$ является полиномом. Последнее возможно, если только нули полинома u являются нулями полинома-коэффициента A, что соответствует утверждению доказываемого свойства. ■

Принимая во внимание свойство 3, нетрудно убедиться в справедливости такого утвержденния.

Свойство 7. *Уравнение* (3.0.0) *при* $\nu_0\geqslant 1$, *когда коэффициент* $A(z)\equiv\mathrm{const}\neq 0$, *не имеет полиномиальных решений, отличных от постоянной.*

Укажем ряд свойств, определяющих кратность нулей полиномиальных решений дифференциального уравнения (3.0.0).

Свойство 8. *Любой нуль* z_0 *кратности* ρ_0 *полиномиального решения* w *уравнения* (3.0.0) *при* $\nu_0\geqslant 1$ *такой, что* $B_{\mu_0}(z_0)\neq 0$, *является нулём полинома-коэффициента* A *кратности* $r=\rho_0(\nu_0-1)+1$.

Доказательство. Уравнение (3.0.0) при $\nu_0\geqslant 1$ имеет вид (1). Поскольку z_0 является нулём полинома w кратности ρ_0, то

$$w\colon z\to(z-z_0)^{\rho_0}\,\widetilde{w}(z),\ \forall z\in\mathbb{C},\qquad(4)$$

где полином $\widetilde{w}$ такой, что $\widetilde{w}(z_0) \neq 0$.

Полином (4) будет решением уравнения (1), если и только если

$$(z-z_0)^{\rho_0-1} A(z)\big((z-z_0)\widetilde{w}'(z) + \rho_0\widetilde{w}(z)\big) \equiv (z-z_0)^{\rho_0\nu_0} w^{\nu_0}(z)\cdot$$

$$\cdot\left(B_{\mu_0}(z) + (z-z_0)^{\nu_1-\nu_0} \sum_{j=1}^{N} B_{\mu_j}(z)(z-z_0)^{\nu_j-\nu_1} \widetilde{w}^{\nu_j-\nu_0}(z)\right).$$

Поскольку

$$B_{\mu_0}(z_0) \neq 0,\ \widetilde{w}(z_0) \neq 0,$$

то у полинома в правой части тождества z_0 является нулём кратности $\rho_0\nu_0$. Следовательно, полином в левой части этого тождества в точке $z = z_0$ имеет нуль той же кратности.

Однако $\widetilde{w}(z_0) \neq 0$ и, стало быть, z_0 должно быть нулём полинома-коэффициента A кратности r такой, что

$$r + \rho_0 - 1 = \rho_0\nu_0.$$

Отсюда $r = \rho_0(\nu_0 - 1) + 1$. ■

Из свойства 8 следует

Свойство 9. *Нули z_τ полиномиальных решений дифференциального уравнения* (3.0.0) *при $\nu_0 \geqslant 1$ кратности ρ_τ такие, что $B_{\mu_0}(z_\tau) \neq 0$, содержатся в множестве нулей полинома A кратности $r = \rho_\tau(\nu_0 - 1) + 1$, соответственно. В частности, при $\nu_0 = 1$ все нули z_τ полиномиальных решений такие, что $B_{\mu_0}(z_\tau) \neq 0$, содержатся в множестве простых нулей полинома A.*

Число z_0, такое, что $P(z_0) \neq 0$, будем называть нулём полинома P нулевой кратности.

Свойство 10. *Полиномиальное решение w уравнения* (3.0.0) *при $\nu_0 \geqslant 1$ имеет нуль z_0 кратности $\rho_0 \geqslant 1$, если только z_0 является нулём коэффициента A кратности*

$$\gamma_0 \geqslant 1 - \rho_0 + \min_{i=\overline{0,N}} \{\nu_i\rho_0 + r_i\},$$

где $r_i,\ i=\overline{0,N}$, *есть кратности нуля* z_0 *полиномов* B_{μ_i} *соответственно.*

Доказательство. Поскольку z_0 является нулём полинома w кратности ρ_0, то имеет место представление (4).

Аналогично,

$$A\colon z\to(z-z_0)^{\gamma_0}\,\widetilde{A}(z),\ \forall z\in\mathbb{C},$$

$$B_{\mu_i}\colon z\to(z-z_0)^{r_i}\,\widetilde{B}_{\mu_i}(z),\ \forall z\in\mathbb{C},\ i=\overline{0,N}\,,$$

где $\widetilde{A}(z_0)\neq 0,\ \widetilde{B}_{\mu_i}(z_0)\neq 0.$

Тогда имеет место тождество

$$(z-z_0)^{\gamma_0+\rho_0-1}\,\widetilde{A}(z)\big((z-z_0)\widetilde{w}'(z)+\rho_0\widetilde{w}(z)\big)\equiv$$

$$\equiv\sum_{i=0}^{N}(z-z_0)^{\nu_i\rho_0+r_i}\,B_{\mu_i}(z)\widetilde{w}^{\nu_i}(z).$$

Поскольку в левой и правой частях тождества полиномы имеют общие нули одинаковой кратности, то

$$\gamma_0+\rho_0-1\geqslant\min_{i=\overline{0,N}}\{\nu_i\rho_0+r_i\},$$

ибо кратность нуля z_0 полинома w в правой части не меньше, чем $\min\limits_{i=\overline{0,N}}\{\nu_i\rho_0+r_i\}$. ■

Укажем ряд свойств, характеризующих степени полиномиальных решений уравнения (3.0.0).

Свойство 11. *Степени* m *полиномиальных решений уравнения* (3.0.0) *удовлетворяют неравенству*

$$m\leqslant\max\Big\{\frac{a-b_N-1}{\nu_N-1}\,,\ \frac{b_0-b_N}{\nu_N-\nu_0}\,,\ \frac{b_1-b_N}{\nu_N-\nu_1}\,,\ \ldots\,,\ \frac{b_{N-1}-b_N}{\nu_N-\nu_{N-1}}\Big\},\quad(5)$$

а при $\nu_0=0$, *кроме того, — и неравенству*

$$m \geqslant \max\Big\{b_0 + a - 1,\ \frac{b_0 - b_1}{\nu_1},\ \frac{b_0 - b_2}{\nu_2},\ \ldots,\ \frac{b_0 - b_N}{\nu_N}\Big\}. \tag{6}$$

Доказательство. Полином w с лексикографическим расположением членов

$$w\colon z \to \lambda_m z^m + \ldots,\ \lambda_m \neq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{7}$$

является решением уравнения (3.0.0) тогда и только тогда, когда он обращает это уравнение в тождество.

При подстановке (7) в дифференциальное уравнение (3.0.0) каждый член будет соответственно полиномом степени

$$a + m - 1,\ b_0 + \nu_0 m,\ b_1 + \nu_1 m,\ \ldots,\ b_N + \nu_N m.$$

Далее,

$$b_N + \nu_N m \leqslant \max\{a + m - 1, b_0 + \nu_0 m, b_1 + \nu_1 m, \ldots, b_{N-1} + \nu_{N-1} m\}$$

$$(b_0 \leqslant \max\{a + m - 1, b_1 + \nu_1 m, b_2 + \nu_2 m, \ldots, b_N + \nu_N m\} \text{ при } \nu_0 = 0),$$

ибо в противном случае $\beta_N \lambda_m^{\nu_N} = 0$ $(\beta_0 = 0)$, как коэффициент при z в наибольшей степени $b_N + \nu_N m$ (степени b_0) полученного тождества. Это невозможно в силу (4.0.0) и (7).

Предположим, что

$$b_\delta + \nu_\delta m = \max\{b_0 + \nu_0 m, b_1 + \nu_1 m, \ldots, b_{N-1} + \nu_{N-1} m\}$$

$$(b_\delta + \nu_\delta m = \max\{b_1 + \nu_1 m, b_2 + \nu_2 m, \ldots, b_N + \nu_N m\}).$$

Тогда

$$b_N + \nu_N m \leqslant \max\{a + m - 1, b_\delta + \nu_\delta m\}$$

$$(b_0 \leqslant \max\{a + m - 1, b_\delta + \nu_\delta m\})$$

или

$$m\leqslant\max\Bigl\{\frac{a-b_N-1}{\nu_N-1},\frac{b_\delta-b_N}{\nu_N-\nu_\delta}\Bigr\}\ \Bigl(m\geqslant\min\Bigl\{b_0-a+1,\frac{b_0-b_\delta}{\nu_\delta}\Bigr\}\Bigr),$$

что соответствует (5) ((6)). ■

Заметим, что при $b_j<b_N$, $j=\overline{0,N-1}$, и $a<b_N+1$ в наборе (5) все числа отрицательные, а значит, справедливо

Свойство 12. *Если* $b_j<b_N$, $j=\overline{0,N-1}$, *и* $a<b_N+1$, *то уравнение* (3.0.0) *не имеет полиномиальных решений.*

При $b_j\leqslant b_N$, $j=\overline{0,N-1}$, и $a\leqslant b_N+1$, в наборе (5) содержатся только неположительные числа, а значит, справедливо

Свойство 13. *Если* $b_j\leqslant b_N$, $j=\overline{0,N-1}$, *и* $a\leqslant b_N+1$, *то полиномиальными решениями уравнения* (3.0.0) *будут лишь постоянные.*

Свойство 14. *Если число* m *является степенью полиномиального решения уравнения* (3.0.0), *то в наборе*

$$\{a+m-1,b_0+\nu_0m,b_1+\nu_1m,\ldots,b_N+\nu_Nm\}\tag{8}$$

содержатся не менее двух одинаковых наибольших чисел.

Доказательство основано на том, что полином-решение с лексикографическим расположением членов (7) обращает уравнение (3.0.0) в тождество, члены которого будут полиномами, тождественно не равными нулю.

Исходя из того, что в наборе (8) хотя бы два числа должны быть одинаковыми и, более того, наибольшими, можем утверждать о справедливости следующих двух свойств [151; 157; 158; 172].

Свойство 15. *Если* m *— степень полиномиального решения уравнения* (3.0.0) *при* $\nu_i\neq1$, $i=\overline{0,N}$, *то* m *содержится в наборе*

$$\Bigl\{\frac{a-b_i-1}{\nu_i-1}\,,\ \frac{b_j-b_i}{\nu_i-\nu_j}\Bigr\},\ \ i,j=\overline{0,N},\ i\neq j,\tag{9}$$

причём в набор (9) *входят лишь целые неотрицательные числа. Для того чтобы число из набора* (9) *определяло степень* m *полиномиального решения, необходимо, чтобы в наборе* (8) *были хотя бы два одинаковых наибольших числа.*

Свойство 16. *Показатель степени m полиномиального решения дифференциального уравнения* (3.0.0) *при* $\nu_k = 1$, $k \in \{0,1\}$, *либо содержится в наборе*

$$\Big\{\frac{a-b_\xi-1}{\nu_\xi-1}\,,\ \frac{b_j-b_i}{\nu_i-\nu_j}\Big\},\ \xi, i=\overline{0,N}\,,$$
$$j=\overline{0,N}\,,\ \xi\neq k,\ i\neq j, \tag{10}$$

в который входят лишь целые неотрицательные числа, причём каждое число из этого набора может определять степень полиномиального решения, если при m, *равном этому числу, в наборе* (8) *будут хотя бы два одинаковых наибольших числа, либо, если*

$$a-1=b_k \ \text{ и } \ -\frac{\beta_0}{\alpha}<\frac{b_j-b_0}{1-\nu_i},\ i=\overline{1,N}\,,\ \text{ при } k=0;$$

$$b_0-b_1<-\frac{\beta_1}{\alpha}<\frac{b_i-b_0}{1-\nu_i},\ i=\overline{2,N}\,,\ \text{ при } k=1,$$

то $m=-\dfrac{\beta_k}{\alpha}$, *а число* $-\dfrac{\beta_k}{\alpha}$ *должно быть натуральным.*

Свойство 17. *Уравнение* (3.0.0) *имеет не более* $N+1$ *полиномиальных решений различных степеней.*

Доказательство. Возьмём $N+2$ полинома $w_\tau, \tau=\overline{1,N+2}\,$, с показателями степени m_τ соответственно. Не ограничивая общности, будем считать, что

$$0\leqslant m_1<m_2<\ldots<m_{N+2}.$$

При подстановке этих полиномов в уравнение (3.0.0) получим однороднную систему линейных уравнений, неизвестными в которой будут полиномы A и B_{μ_i}, $i=\overline{0,N}$:

$$\sum_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(z)w_\tau^{\nu_i}-A(z)w'_\tau(z)=0,\ \tau=\overline{1,N+2}\,. \tag{11}$$

Определитель системы (11) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} w_1^{\nu_0} & w_1^{\nu_1} & \ldots & w_1^{\nu_N} & -w_1' \\ w_2^{\nu_0} & w_2^{\nu_1} & \ldots & w_2^{\nu_N} & -w_2' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ w_{N+2}^{\nu_0} & w_{N+2}^{\nu_1} & \ldots & w_{N+2}^{\nu_N} & -w_{N+2}' \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

При условии, что

$$\sum_{\tau=1}^{N+2} m_\tau \neq 0,$$

определитель (12) не обращается в тождественный нуль.

Действительно, следуя [136], преобразуем определитель (12) к треугольному виду, делая нулями элементы ниже главной диагонали. Разлагая диагональнные элементы определителя (12), приведённого к треугольному виду, по убывающим степеням z, нетрудно доказать, что ни один из диагональных элементов преобразованного определителя не обращается в тождественный нуль.

Таким образом, система (11) имеет лишь тривиальные решения $A(z)\equiv 0,\ B_{\mu_i}(z)\equiv 0,\ i=\overline{0,N}$, поэтому не существует уравнения вида (3), имеющего $N+2$ полиномиальных решений различных степеней.

Далее, имея $N+1$ полиномов w_τ с показателями степени m_τ при условии $\sum\limits_{\tau=1}^{N+1} m_\tau \neq 0,$ найдём

$$B_{\mu_i}(z) = -\,B_{\mu_k}(z)\frac{\Delta_{B_{\mu_i}}(z)}{\Delta}\,,\ i=\overline{0,N}\,,\ i\neq k;$$

$$A(z) = -\,B_{\mu_k}(z)\frac{\Delta_A(z)}{\Delta}\,.$$

Тогда получим вполне определённое дифференциальное уравнение вида (3.0.0)

$$\Delta_A(z)w' = -\Delta w^{\nu_k} + \sum_{\substack{i=0,\\ i\neq k}}^{N} \Delta_{B_{\mu_i}}(z) w^{\nu_i},$$

имеющее $N+1$ полиномиальных решений различных степеней. Здесь Δ — главный определитель, а Δ_A и $\Delta_{B_{\mu_i}}$ — вспомогательные определители. ■

Заметим, что дифференциальное уравнение (3.0.0) имеет не более $\nu_N - \nu_0$ решений-полиномов нулевой степени, отличных от нулевого.

Действительно, подставив в уравнение (3.0.0) $w = C = \mathrm{const}$, устанавливаем, что постоянные C являются корнями уравнения

$$C^{\nu_0}\left(B_{\mu_0}(z) + \sum_{i=1}^{N} B_{\mu_i}(z) C^{\nu_i-\nu_0}\right) = 0,$$

которое имеет не более $\nu_N - \nu_0$ ненулевых решений.

Рассмотрим способ построения в целом полиномов-решений степени m уравнения (3.0.0), удовлетворяющей соотношению

$$a - 1 < \max_{i=\overline{0,N}} \{b_i + (\nu_i - 1)m\}. \tag{13}$$

Положим, что в наборе

$$\{b_0 + \nu_0 m, b_1 + \nu_1 m, \ldots, b_N + \nu_N m\} \tag{14}$$

при некотором m одинаковыми и наибольшими будут числа со следующими номерами

$$\mu_{k_0}, \mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_p},\ \ 1 \leqslant p \leqslant N,\ k_i \in \{0, 1, \ldots, N\},\ i = \overline{0,p}\,.$$

Члены уравнения (3.0.0)

$$B_{\mu_{k_i}}(z)w^{\nu_{k_i}},\ i=\overline{0,p}$$

произвольным образом разобьём на два слагаемых:

$$\widetilde{A}(z)\mathfrak{C}^{\ell}(z,w)\mathfrak{D}_1^{\delta}(z,w)= \tag{15А}$$
$$=B_{\mu_{t_0}}(z)w^{\nu_{t_0}}+B_{\mu_{t_1}}(z)w^{\nu_{t_1}}+\ldots+B_{\mu_{t_\lambda}}(z)w^{\nu_{t_\lambda}},$$

$$\widetilde{B}(z)\mathfrak{C}^{\ell}(z,w)\mathfrak{D}_2^{\delta}(z,w)= \tag{15Б}$$
$$=B_{\mu_{\tau_0}}(z)w^{\nu_{\tau_0}}+B_{\mu_{\tau_1}}(z)w^{\nu_{\tau_1}}+\ldots+B_{\mu_{\tau_s}}(z)w^{\nu_{\tau_s}},$$

где $\{t_0,t_1,\ldots,t_\lambda\}\cup\{\tau_0,\tau_1,\ldots,\tau_s\}=\{k_0,k_1,\ldots,k_p\}$, $t_i\neq\tau_j$, $i=\overline{0,\lambda}$, с одним лишь требованием:

$$\deg\bigl(\widetilde{A}(z)\mathfrak{C}^{\ell}(z,w(z))\mathfrak{D}_1^{\delta}(z,w(z))\bigr)=$$
$$=\deg\bigl(\widetilde{B}(z)\mathfrak{C}^{\ell}(z,w(z))\mathfrak{D}_2^{\delta}(z,w(z))\bigr)=$$
$$=\deg\bigl(B_{\mu_{t_j}}(z)w^{\nu_{t_j}}(z)\bigr),\ j\in\{0,1,\ldots,\lambda\}.$$

Разбиение (15) уравнения (3.0.0) аналогично разбиению (3.0.1.2) уравнения (1.0.1.2), и оно всегда допустимо.

В принятых обозначениях как следствие теоремы 1.0.1.2 справедливо

Свойство 18. *Если полином w степени m при которой в наборе (14) одинаковыми и наибольшими будут числа с номерами $\mu_{k_0},\mu_{k_1},\ldots,\mu_{k_p}$, $1\leqslant p\leqslant N$, $k_i\in\{0,1,\ldots,N\}$, $i=\overline{0,p}$, является решением уравнения* (3.0.0) *при* (13), *то полином w является решением уравнения* (14.0.1) *или решением хотя бы одного из уравнений* (15.0.1), *где P — некоторый полином степени $\mathfrak{f}$, определяемый соотношением*

$$\mathfrak{f} = \max_{j=\overline{p+1,N}} \bigl\{ a + m - 1, q + \ell\mathfrak{C}(m) + \delta\mathfrak{D}_2(m), b_{k_j} + \nu_{k_j} m \bigr\} - \\ - \widetilde{a} - \ell\mathfrak{C}(m) - (\delta - 1)(\mathfrak{D}_2(m) + s), \tag{16}$$

причём, если $\mathfrak{f} < 0$, *то* $P(z) \equiv 0$;

$$S(z) = \left[\left(-\frac{\widetilde{B}(z)}{\widetilde{A}(z)} \right)^{\frac{1}{\delta}} \right],$$

$$\widetilde{a} \leqslant \widetilde{b},\ \widetilde{B}(z) = -\widetilde{A}(z) S^{\delta}(z) - Q(z),\ s = \deg S(z),\ q = \deg Q(z),$$

$$\mathfrak{C}(m) = \deg \mathfrak{C}(z, w(z)),\ \mathfrak{D}_2(m) = \deg \mathfrak{D}_2(z, w(z)).$$

Полином w, *являющийся решением уравнения* (14.0.1), *будет решением уравнения* (3.0.0), *если и только если он является решением уравнения*

$$A(z) w' = \sum_{j=p+1}^{N} B_{\mu_{k_j}}(z) w^{\nu_{k_j}}.$$

Если полином w *является решением хотя бы одного из уравнений* (15.0.1) *при* $P(z) \equiv 0$, *то для того, чтобы этот полином был решением уравнения* (3.0.0), *необходимо и достаточно, чтобы он являлся решением уравнения*

$$A(z) w' = -Q(z) \mathfrak{C}^{\ell}(z, w) \mathfrak{D}_2^{\delta}(z, w) + \sum_{j=p+1}^{N} B_{\mu_{k_j}}(z) w^{\nu_{k_j}}.$$

Глава V

ЦЕЛЫЕ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ РЕШЕНИЯ

§ 1. Сведения о целых функциях

Определение 1. *Функция одного комплексного переменного называется целой, если она является аналитической во всей комплексной плоскости, кроме, быть может, бесконечно удалённой точки.*

Следуя подходу К. Вейерштрасса [102, с. 226] к определению аналитической функции, целой функцией будет та функция, которая представима степенным рядом, сходящимся на всей комплексной плоскости (нерасширенной).

Итак, целая функция f представима степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ a_n \in \mathbb{C}, \ \forall n \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

с радиусом сходимости $R = \infty$.

Отсюда на основании теоремы Коши – Адамара [102, с. 211 – 212] получаем *критерий Коши – Адамара* целой функции.

Теорема 1. *Функция комплексного переменного*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

является целой тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0. \tag{2}$$

Например, целыми будут определёные на поле $\mathbb{C}$ функции

$$f_1\colon z \to e^z,\quad f_2\colon z \to \sin z,\quad f_3\colon z \to \cos z,$$

$$f_4\colon z \to \operatorname{sh} z,\quad f_5\colon z \to \operatorname{ch} z,\quad f_6\colon z \to \cos\sqrt{z}\,,\quad f_7\colon z \to \operatorname{ch}\sqrt{z}\,,$$

$$f_8\colon z \to \frac{\sin z}{z}\,,\quad f_9\colon z \to \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\,,\quad f_{10}\colon z \to \frac{e^z - 1 - z}{z^2}\,.$$

Это без особых трудностей устанавливаем посредством критерия Коши – Адамара, разложив функции $f_i,\ i = \overline{1,10}\,,$ в степенные ряды и вычислив пределы (2).

Заметим, что целые функции $f_i,\ i = \overline{1,10}\,,$ являются элементарными. Целыми неэлементарными будут, например, функции

$$\Phi\colon z \to z + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^3} + \ldots + \frac{z^n}{n^n} + \ldots\,,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\Psi\colon z \to \frac{z^2}{\ln^2 2} + \frac{z^3}{\ln^3 3} + \ldots + \frac{z^n}{\ln^n n} + \ldots\,,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

$$\chi\colon z \to z + \frac{z^2}{2^4} + \frac{z^3}{3^6} + \ldots + \frac{z^n}{n^{2n}} + \ldots\,,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

так как для каждой из них выполняется условие (2).

Следуя подходу Коши – Римана [73, с. 22; 102, с. 67; 143, с. 37] к дифференцированию функции комплексного переменного, получаем *критерий Коши – Римана* целой функции.

Теорема 2. *Функция комплексного переменного является целой тогда и только тогда, когда она дифференцируема на всей конечной части комплексной плоскости.*

Из критерия Коши – Римана следует возможность представления целой функции рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\,(z - z_0)^n,\ \forall z \in \mathbb{C},\ z_0 \in \mathbb{C},$$

и рядом Маклорена

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,z^n,\ \forall z\in\mathbb{C},$$

сходящимися на всей комплексной плоскости.

Отсюда получаем простейшие свойства целой функции:

1) производная целой функции — функция целая;

2) сумма конечного числа целых функций — функция целая;

3) произведение конечного числа целых функций — функция целая;

4) частное двух целых функций есть целая функция, если только делитель нигде не обращается в нуль;

5) целая функция от целой функции есть целая функция.

Простейшей целой функцией является полином.

Целая функция является обобщением понятия полинома и близка к полиномам по своим свойствам. Ещё ученики О. Коши, Ш. Брио и Ж. Буке, подчёркивая связь аналитических функций с полиномами, ввели понятие «голоморфная функция» (голоморфный — подобный целому, от греческих слов $\delta\lambda o\zeta$ — весь, целый и $\mu o\rho\varphi o\zeta$ — форма, вид).

Определение 2. *Функция вещественной переменной* r

$$M(r;f)=\max_{|z|=r}|f(z)| \tag{3}$$

называется максимумом модуля целой функции f.

Например, максимум модуля:

1) полинома $P_n\colon z\to a_nz^n+\ldots+a_0,\ \forall z\in\mathbb{C}$, с $\deg P_n(z)=n$ асимптотически равен модулю высшего члена, так как

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M(r;P_n)}{|a_n|r^n}=1;$$

2) $M(r;e^z)=e^r$;

3) $M(r;\sin z)=M(r;\operatorname{sh} z)=\operatorname{sh} r$;

4) $M(r;\cos z)=M(r;\operatorname{ch} z)=\operatorname{ch} r$.

Максимум модуля — функция неубывающая, а если целая функция f не является постоянной, то максимум модуля — функция возрастающая и

$$\lim_{r\to+\infty} M(r;f) = +\infty.$$

Для коэффициентов степенного ряда (1), определяющего целую функцию f, справедливы *оценки Коши*:

$$|a_n| \leqslant \frac{M(r;f)}{r^n}\,.$$

Теорема 3 (*Коши – Лиувилля*)[1]. *Если модуль целой функции ограничен на всей комплексной плоскости, то целая функция является постоянной.*

В дальнейших рассуждениях удобно использовать более общую формулировку.

Теорема 4 (*Лиувилля*). *Если существует такое целое неотрицательное число n, что*

$$M(r;f) < Ar^n,\ r > r_0, \tag{4}$$

то целая функция f является полиномом степени, не большей n.

В приложениях часто используется

Следствие 1. *Если целая функция f не является полиномом, то её максимум модуля растёт быстрее, чем максимум модуля любого полинома P, т.е.*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{M(r;f)}{M(r;P)} = +\infty. \tag{5}$$

Напомним, что функция $w\colon z \to w(z)$ называется *алгебраической*, если она тождественно удовлетворяет уравнению

[1] Эта теорема была опубликована О. Коши в 1844 году. Ж. Лиувилль излагал её на лекциях в 1847 году. В дальнейшем её называли теоремой Лиувилля.

$$\sum_{j=0}^{m} Q_j(z) w^j = 0,$$

где $Q_j,\ j = \overline{0, m}\,,$ суть полиномы, $Q_m(z) \not\equiv 0.$

Аналитические функции, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*.

Для целых функций имеет место

Теорема 5. *Если целая функция не является полиномом, то она — трансцендентная.*

Поэтому следствие 1 можно сформулировать и так

Следствие 2. *Максимум модуля целой трансцендентной функции растёт быстрее, чем максимум модуля любого полинома.*

Ещё заметим, что в бесконечно удалённой точке $z = \infty$ целая функция может:

а) быть аналитической;

б) иметь полюс некоторого порядка $k \geqslant 1;$

в) иметь существенную особенность.

В соответствии с характером бесконечно удалённой точки целая функция может быть:

а) постоянной, если $f\colon z \to f(z)$ — аналитическая в точке $z = \infty;$

б) полиномом степени $k \geqslant 1,$ если $f\colon z \to f(z)$ имеет в точке $z = \infty$ полюс k-го порядка;

в) трансцендентной, если $f\colon z \to f(z)$ в точке $z = \infty$ имеет существенную особенность.

Из теоремы Лиувилля и её следствий получаем, что при оценке роста целых трансцендентных функций следует выбирать для сравнения функции, растущие быстрее, чем степенные. В качестве таких функций выбирают показательные

$$g\colon r \to \exp r^k, \quad \text{где} \quad k > 0.$$

Определение 3. *Целая функция f называется целой функцией конечного порядка, если существует такое чис-*

ло $\mu \in (0;\, +\infty)$, *что*

$$M(r;f) < \exp r^{\mu},\ \forall r > r_0. \qquad (6)$$

Например, полином P степени $\deg P(z) \leqslant n$ в силу теоремы Лиувилля имеет максимум модуля

$$M(r;P) < Ar^{n},\ r > r_0.$$

А поскольку

$$Ar^{n} < \exp r^{\alpha},\ r > r_0,\ 0 < \alpha \leqslant 1,$$

то полином P — целая функция конечного порядка.

Целая трансцендентная функция косинус является целой функцией конечного порядка, так как

$$M(r;\cos z) = \frac{1}{2}\,(e^{r} + e^{-r}) < e^{r},\ r > r_0.$$

Определение 4. *Нижняя грань* ρ *множества чисел* μ, *удовлетворяющих условию* (6)*, называется порядком целой функции* f и обозначается $\operatorname{ord} f(z) = \rho$.

Итак,

$$\operatorname{ord} f(z) = \inf \mu, \quad \text{где} \quad M(r;f) < \exp r^{\mu},\ r > r_0.$$

Поскольку $M(r;e^{z}) = e^{r}$, то $\operatorname{ord} e^{z} = 1$.

Для полинома P в силу того, что

$$M(r;P) < \exp r^{\alpha},\ r > r_0,\ 0 < \alpha \leqslant 1,$$

порядок $\operatorname{ord} P(z) = 0$.

Например,

$$\operatorname{ord}\, \sin z = \operatorname{ord}\, \cos z = 1, \quad \operatorname{ord}\, \exp e^{z} = \infty, \quad \operatorname{ord} \frac{e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}}{2} = \frac{1}{2}\,.$$

Функция

$$\varphi\colon z \to 1 + \frac{z^p}{q!} + \frac{z^{2p}}{(2q)!} + \ldots + \frac{z^{np}}{(nq)!} + \ldots\,,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

является примером целой трансцендентной функции наперёд заданного порядка $\operatorname{ord}\varphi(z) = \dfrac{p}{q}$.

Рост целой функции конечного положительного порядка ρ уточняется понятием типа целой функции.

Определение 5. *Целая функция f конечного положительного порядка ρ называется целой функцией конечного типа, если существует такое $\alpha \in (0;\, +\infty)$, что*

$$M(r; f) < \exp \alpha r^{\rho},\ \forall r > r_0. \tag{7}$$

Например, косинус есть целая функция конечного типа, так как

$$M(r; \cos z) < e^{r},\ \forall r > r_0.$$

Определение 6. *Нижняя грань σ множества чисел α, удовлетворяющих условию* (7), *называется типом целой функции f порядка ρ* и обозначается $\operatorname{typ} f(z) = \sigma$.

В символах:

$$\operatorname{ord} f(z) = \rho \in (0;\, +\infty)\, \&\, M(r; f) < \exp \alpha r^{\rho},\ \forall r > r_0,\ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ \operatorname{typ} f(z) = \inf \alpha.$$

Так как $\operatorname{ord} e^{z} = 1$, а $M(r; e^{z}) = e^{r}$, то $\operatorname{typ} e^{z} = 1$.

Существует шкала роста по типам, в которой выделяются целые трансцендентные функции *минимального* ($\operatorname{typ} f(z) = 0$), *нормального* ($\operatorname{typ} f(z) = \sigma \in (0;\, +\infty)$), *максимального* ($\operatorname{typ} f(z) = \infty$) типов.

Если $\operatorname{ord} f(z) < 1$ или $\operatorname{ord} f(z) = 1$, а $\operatorname{typ} f(z) < +\infty$, то f — целая функция *экспоненциального* типа.

Мы не будем здесь углубляться в проблемы теории целых функций, а отсылаем читателя при необходимости к таким глубоким фундаментальным исследованиям, как [8; 9; 91; 92; 139]. Потому что поставленные нами задачи будут решаться лишь указанием основных характеристик роста целых трансцендентных функций-решений дифференциальных уравнений, как то тип и порядок.

Отметим, что имеет место

Свойство 1. *При дифференцировании порядок и тип целой трансцендентной функции сохраняются.*

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений существенное значение имеет то, что производные целой функции можно асимптотически выразить через саму функцию. Особую роль на случай целых трансцендентных функций играет теория центрального индекса Вимана [199; 200] и Валирона [8].

Пусть целая функция представима рядом (1). Для данного r при $|z| = r$ среди членов ряда (1) найдётся по крайней мере один с наибольшим модулем. Если же их несколько, выберем среди них член с наибольшим индексом $n = \nu,$ который зависит от $r,$ т.е.

$$\nu = \nu(r).$$

Член

$$m(r) = |a_\nu| r^\nu$$

называется *максимальным членом*, а индекс $\nu = \nu(r)$ — *центральным индексом*.

У целых трансцендентных функций

$$\nu(r) \to +\infty \quad \text{при} \quad r \to +\infty.$$

Например, целая трансцендентная функция

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,, \ \forall z \in \mathbb{C},$$

имеет центральный индекс

$$\nu(r) = [r]$$

и максимальный член

$$m(r) = \frac{r^{[r]}}{[r]!}\,,$$

где символ [ ] в данном случае означает целую часть числа.

Действительно,

$$\max_{n=\overline{0,\infty}} \left\{ \frac{r^n}{n!} \right\} = \frac{r^s}{s!}$$

тогда и только тогда, когда

$$\frac{r^s}{s!} > \frac{r^{s+1}}{(s+1)!}\,, \quad \frac{r^s}{s!} \geqslant \frac{r^{s-1}}{(s-1)!}, \quad \text{т.е.} \quad r-1 \leqslant s < r,$$

а значит, когда $s = [r]$.

Для полинома P степени n, начиная с некоторого $r > r_0$, центральный индекс $\nu(r) = n$.

Аналогично асимптотической формуле (1.1.2.1) представления производной полинома через сам полином, для целой трансцендентной функции f в допустимых точках ξ, $|\xi| = r$, таких, что

$$|f(\xi)| = M(r; f),$$

имеет место асимптотическая формула [9, с. 25]

$$f^{(l)}(\xi) = f(\xi)\Big(\frac{\nu(r)}{\xi}\Big)^l \big(1 + \varepsilon_l(\xi)\big), \tag{8}$$

где

$$\big|\varepsilon_l(\xi)\big| = o\bigg(\nu^{\delta - \frac{1}{4}}(r)\bigg),\ 0 < \delta < \frac{1}{4}\,.$$

§ 2. Целые решения обыкновенных дифференциальных уравнений

1. Целые трансцендентные решения алгебраических дифференциальных уравнений

Наиболее существенный результат, когда уравнение (ADE) в качестве целых решений может иметь только полиномы, был получен Г. Виттихом [201] и гласит следующее

Теорема 1. *Алгебраическое дифференциальное уравнение* (1.1.1.1) *не имеет целых трансцендентных решений, если оно содержит только один доминирующий член.*

Доказательство. Пусть $w\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — целое трансцендентное решение уравнения (1.1.1.1). Тогда в допустимых точках ξ таких, что $|w(\xi)| = M(r; w)$, производные $w^{(j)}$ выражаются через функцию w и её центральный индекс ν по формуле (8.0.1).

Уравнение (1.1.1.1) в этих точках имеет вид

$$\sum_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(\xi) w^{\varkappa_i}(\xi) \left(\frac{\nu(r)}{\xi}\right)^{\mathfrak{m}_i} \bigl(1 + \varepsilon_i(\xi)\bigr) = 0, \qquad (1)$$

где $|\varepsilon_i(\xi_k)| \to 0$ для последовательности допустимых ξ_k таких, что $|\xi_k| \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $i = \overline{0, N}$.

Пусть δ-й член уравнения (1.1.1.1) является доминирующим. Тогда, выполнив почленное деление равенства (1) на

$$B_{\mu_\delta}(\xi) w^{d}(\xi) \left(\frac{\nu(r)}{\xi}\right)^{\mathfrak{m}_\delta},$$

получим

$$\sum_{\substack{i = 0 \\ i \neq \delta}}^{N} \frac{B_{\mu_i}(\xi)}{B_{\mu_\delta}(\xi)}\, w^{\varkappa_i - d}(\xi) \left(\frac{\nu(r)}{\xi}\right)^{\mathfrak{m}_i - \mathfrak{m}_\delta} \bigl(1 + \varepsilon_i(\xi)\bigr) + 1 + \varepsilon_\delta(\xi) = 0. \qquad (2)$$

На основании (5.0.1) с учётом теоремы Лиувилля имеем, что

$$\frac{B_{\mu_i}(\xi_k)}{B_{\mu_\delta}(\xi_k)}\, w^{\varkappa_i - d}(\xi_k)\left(\frac{\nu(r)}{\xi_k}\right)^{\mathfrak{m}_i-\mathfrak{m}_\delta} \to 0 \quad \text{при} \quad |\xi_k| \to +\infty,$$

так как $d-\varkappa_i \geqslant 1$ для всех $i=\overline{0,N}$ и $i\neq\delta$.

Предельным переходом в равенстве (2) получаем противоречие, доказывающее теорему. ■

Например, нелинейное уравнение

$$w^{(l)} = \sum_{i=0}^{n} A_i(z)w^i,\ n\geqslant 2,\ A_n(z)\not\equiv 0, \tag{3}$$

где $A_i,\ i=\overline{0,n}$, суть полиномы комплексного переменного z, аналогично как и алгебраическое дифференциальное уравнение

$$A(z)w^{(l)} = \sum_{i=0}^{n} A_i(z)w^i,\ n\geqslant 2,\ A_n(z)\not\equiv 0, \tag{4}$$

с полиномиальными коэффициентами A и $A_i,\ i=\overline{0,n}$, имеет только один доминирующий член $A_n(z)w^n$ с максимальной размерностью $d=n\geqslant 2$.

А значит, целыми решениями нелинейных дифференциальных уравнений (3) и (4) могут быть только полиномы.

Алгебраическое дифференциальное уравнение первого порядка

$$(w')^2 = 1 - w^2 \tag{5}$$

имеет два доминирующих члена $(w')^2$ и w^2 с максимальной размерностью $d=2$.

Целые трансцендентные функции

$$w_1 : z\to \sin z,\ \forall z\in\mathbb{C}, \quad \text{и} \quad w_2 : z\to\cos z,\ \forall z\in\mathbb{C},$$

являются его решениями.

Кроме того, полиномы

$$w_3 : z\to 1,\ \forall z\in\mathbb{C}, \quad \text{и} \quad w_4 : z\to -1,\ \forall z\in\mathbb{C},$$

также являются решениями данного уравнения.

Заметим, что решениями уравнения (5) являются функции-решения линейного уравнения

$$w'' + w = 0,$$

которое получается из уравнения (5) дифференцированием и имеет общее решение

$$w\colon z \to C_1 \cos z + C_2 \sin z,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Подставляя это общее решение линейного уравнения в уравнение (5), находим общее решение уравнения (5)

$$w\colon z \to C \cos z \pm \sqrt{1 - C^2}\, \sin z,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

и особые решения

$$w\colon z \to\ \pm 1,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Обобщением теоремы 1 является доказанная в [24]

Теорема 2. *Если выполняются условия:*

1) $\varkappa_0 = \ldots = \varkappa_p = d,\ d > \varkappa_\eta,\ 0 \leqslant p \leqslant N,\ \eta = \overline{p+1, N}\,;$

2) $\mathfrak{m}_0 = \ldots = \mathfrak{m}_h = \mathfrak{m},\ \mathfrak{m} > \mathfrak{m}_\delta,\ 0 \leqslant h \leqslant p,\ \delta = \overline{h+1, p}\,;$

3) $b_0 = \ldots = b_\lambda = b,\ b > b_\tau,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant h,\ \tau = \overline{\lambda+1, h}\,;$

4) $b - \mathfrak{m} \geqslant b_\delta - \mathfrak{m}_\delta,\ \delta = \overline{h+1, p}\,;$

5) $\sum\limits_{i=0}^{\lambda} \beta_i \neq 0,$

то алгебраическое дифференциальное уравнение (1.1.1.1) *не имеет целых трансцендентных решений.*

Доказательство проведём методом от противного и допустим, что $w\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — целое трансцендентное решение дифференциального уравнения (1.1.1.1).

В допустимых точках ξ таких, что $|w(\xi)| = M(r; w)$, уравнение (1.1.1.1) будет иметь вид:

$$\sum_{l=0}^{\lambda} B_{\mu_l}(\xi) w^d(\xi) \left(\frac{\nu(r)}{\xi}\right)^{\mathfrak{m}} \bigl(1 + \varepsilon_l(\xi)\bigr) +$$

$$+\sum_{\tau=\lambda+1}^{h} B_{\mu_\tau}(\xi) w^{d}(\xi)\biggl(\frac{\nu(r)}{\xi}\biggr)^{\mathfrak{m}}\bigl(1+\varepsilon_\tau(\xi)\bigr)+$$

$$+\sum_{\delta=h+1}^{p} B_{\mu_\delta}(\xi) w^{d}(\xi)\biggl(\frac{\nu(r)}{\xi}\biggr)^{\mathfrak{m}_\delta}\bigl(1+\varepsilon_\delta(\xi)\bigr)+ \qquad (6)$$

$$+\sum_{\eta=p+1}^{N} B_{\mu_\eta}(\xi) w^{\varkappa_\eta}(\xi)\biggl(\frac{\nu(r)}{\xi}\biggr)^{\mathfrak{m}_\eta}\bigl(1+\varepsilon_\eta(\xi)\bigr)=0,$$

где $|\varepsilon_i(\xi_k)| \to 0$ для последовательности допустимых ξ_k таких, что $|\xi_k| \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $i=\overline{0,N}$.

Выполнив почленное деление равенства (6) на произведение

$$B_{\mu_0}(\xi) w^{d}(\xi)\biggl(\frac{\nu(r)}{\xi}\biggr)^{\mathfrak{m}},$$

получим

$$1+\varepsilon_0(\xi)+\sum_{l=1}^{\lambda}\frac{B_{\mu_l}(\xi)}{B_{\mu_0}(\xi)}\bigl(1+\varepsilon_l(\xi)\bigr)+\sum_{\tau=\lambda+1}^{h}\frac{B_{\mu_\tau}(\xi)}{B_{\mu_0}(\xi)}\bigl(1+\varepsilon_\tau(\xi)\bigr)+$$

$$+\sum_{\delta=h+1}^{p}\frac{B_{\mu_\delta}(\xi)}{B_{\mu_0}(\xi)}\biggl(\frac{\nu(r)}{\xi}\biggr)^{\mathfrak{m}_\delta-\mathfrak{m}}\bigl(1+\varepsilon_\delta(\xi)\bigr)+ \qquad (7)$$

$$+\sum_{\eta=p+1}^{N}\frac{B_{\mu_\eta}(\xi)}{B_{\mu_0}(\xi)}\, w^{\varkappa_\eta-d}(\xi)\biggl(\frac{\nu(r)}{\xi}\biggr)^{\mathfrak{m}_\eta-\mathfrak{m}}\bigl(1+\varepsilon_\eta(\xi)\bigr)=0.$$

Поскольку для всех $l=\overline{0,\lambda}$ степени b_l коэффициентов B_l равны, то при $|\xi_k| \to +\infty$

$$\frac{B_{\mu_l}(\xi_k)}{B_{\mu_0}(\xi_k)} \to \frac{\beta_l}{\beta_0}\,,\ l = \overline{1, \lambda}\,. \tag{8}$$

Учитывая, что для всех $\tau = \overline{\lambda + 1, h}$ степени $b_\tau < b$, получим, что при $|\xi_k| \to +\infty$

$$\frac{B_{\mu_\tau}(\xi_k)}{B_{\mu_0}(\xi_k)} \to 0,\ \tau = \overline{\lambda + 1, h}\,. \tag{9}$$

При $\delta = \overline{h + 1, p}$ разность относительных весов $\mathfrak{m}_\delta - \mathfrak{m} < 0$, а $\nu(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Кроме того, $\mathfrak{n}_\delta \leqslant \mathfrak{n}$. Тогда при $|\xi_k| \to +\infty$

$$\frac{B_{\mu_\delta}(\xi_k)}{B_{\mu_0}(\xi_k)} \Big(\frac{\nu(r)}{\xi_k}\Big)^{\mathfrak{m}_\delta - \mathfrak{m}} \to 0,\ \delta = \overline{h + 1, p}\,. \tag{10}$$

Поскольку $d > \varkappa_\eta$ для всех $\eta = \overline{p + 1, N}$, то в силу следствия 1.0.1 из теоремы Лиувилля при $|\xi_k| \to +\infty$

$$\frac{B_{\mu_\eta}(\xi_k)}{B_{\mu_0}(\xi_k)}\, w^{\varkappa_\eta - d}(\xi_k) \Big(\frac{\nu(r)}{\xi_k}\Big)^{\mathfrak{m}_\eta - \mathfrak{m}} \to 0,\ \eta = \overline{p + 1, N}\,. \tag{11}$$

Переходя в равенстве (7) к пределу при $|\xi_k| \to +\infty$, на основании (8) — (11) будем иметь, что

$$1 + \sum_{l=1}^{\lambda} \frac{\beta_l}{\beta_0} = 0.$$

Последнее равенство противоречит условию 5). ■

Теорему 1 получаем из теоремы 2 при $p = 0$.

Пример 1. Алгебраическое дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered} z^3(2z^2 + 1)w''(w')^2 - 2z^5(w'')^2 w - 4z^2 w''' w' w + \\ + 4z^3 w''' w^2 + 2z(2z^2 + 3)(w')^3 = 0 \end{gathered} \tag{12}$$

таково, что:

1) $\varkappa_0 = \ldots = \varkappa_4 = d = 3;$

2) $\mathfrak{m}_0 = \ldots = \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m} = 4,\ \mathfrak{m} > \mathfrak{m}_3 = \mathfrak{m}_4 = 3;$

3) $b_0 = b_1 = b = 5,\ b > b_2 = 2;$

4) $b - \mathfrak{m} = \mathfrak{n} = 1,\ \mathfrak{n} > \mathfrak{n}_3 = \mathfrak{n}_4 = 0;$

5) $\beta_0 + \beta_1 = 0.$

Итак, для уравнения (12) выполняются условия 1) — 4) теоремы 2 и не выполняется условие 5).

Непосредственно подстановкой получаем, что целая трансцендентная функция экспоненциального вида

$$w\colon z \to \exp z^2,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

является решением уравнения (12).

Пример 2. Алгебраическое дифференциальное уравнение

$$z(z+4)w'''w' - (z+1)(z+3)w^{(IV)}w + zw' - (z+1)w = 0 \qquad (13)$$

не удовлетворяет условиям теоремы 2, так как

$$\varkappa_0 = \varkappa_1 = d = 2 > \varkappa_2 = \varkappa_3 = 1;\ h = p = \lambda = 1$$

и

$$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_1 = 4,\ b_0 = b_1 = 2,$$

но условие 5) не выполняется, ибо $\beta_0 = 1,\ \beta_1 = -1.$

Легко проверить, что целая трансцендентная функция

$$w\colon z \to ze^z,\ \forall z \in \mathbb{C},$$

является решением уравнения (13).

Пример 3. Алгебраическое дифференциальное уравнение

$$\begin{gathered}(2z+7)^3(2z+3)(w''')^4 - 16(z+3)^4\bigl(w^{(IV)}\bigr)^3 w + \\ + (2z+11)(2z+3)^2 w^{(V)}w'''(w'')^2 - \\ - 16(z+3)(z+4)(2z+5)w^{(VIII)}w''w^2 + \\ + (2z+5)(z+5)w^{(VI)}w'''w'' - (z+3)(2z+9)w^{(VII)}(w'')^2 = 0\end{gathered} \qquad (14)$$

не удовлетворяет условиям теоремы 2, так как

1) $\varkappa_0 = \ldots = \varkappa_3 = d = 4,\ d > \varkappa_4 = \varkappa_5 = 3;$

2) $\mathfrak{m}_0 = \ldots = \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m} = 12,\ \mathfrak{m} > \mathfrak{m}_3 = 10;$

3) $b_0 = b_1 = b = 4,\ b > b_2 = 3;$

4) $b - \mathfrak{m} = \mathfrak{n} = -8,\ \mathfrak{n} < \mathfrak{n}_3 = -7,$

т.е. нарушается условие 4) теоремы 2.

Заметим, что $\beta_0 = 16,\ \beta_1 = -16,$ а значит, не выполняется и условие 5) теоремы 2.

Целая трансцендентная функция

$$w\colon z \to (2z+3)e^{2z},\ \forall z \in \mathbb{C},$$

является решением уравнения (14).

Рассмотрим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение порядка $\mathfrak{l} \geqslant 1$

$$\sum_{i=0}^{s} A_{\mu_i}(z) w^{\mu_i} w^{(\mathfrak{l})} = \sum_{k=0}^{N} B_{\nu_k}(z) w^{\nu_k}, \tag{15}$$

где A_{μ_i} и B_{ν_k}, $i = \overline{0, s}$, $k = \overline{0, N}$, — полиномы комплексного переменного z соответственно степеней a_{μ_i} и b_{ν_k} с коэффициентами α_{μ_i} и β_{ν_k} высшего члена в их лексикографическом представлении, полиномы

$$\sum_{i=0}^{s} A_{\mu_i}(z) w^{\mu_i} \quad \text{и} \quad \sum_{k=0}^{N} B_{\nu_k}(z) w^{\nu_k}$$

взаимно простые, а показатели степени μ_i и ν_k такие, что

$$\begin{aligned} &0 \leqslant \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_s,\ \mu_s \geqslant 1; \\ &0 \leqslant \nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_N,\ \nu_N \geqslant 1. \end{aligned} \tag{16}$$

Для уравнения (15) на основании теоремы 2 получаем

Следствие 1. *Если* $\mu_s \neq \nu_N - 1$ *или* $a_{\mu_s} \geqslant b_{\nu_N} + \mathfrak{l}$ *при* $\mu_s = \nu_N - 1$, *то дифференциальное уравнение* (15) *при условии* (16) *не имеет целых трансцендентных решений.*

Действительно, при $\mu_s \neq \nu_{_N} - 1$ уравнение (15) в силу (16) имеет только один доминирующий член:

$$A_{\mu_s}(z)w^{\mu_s} w^{(\mathfrak{l})}, \quad \text{если} \quad \mu_s > \nu_{_N} - 1;$$

$$-B_{\nu_{_N}}(z)w^{\nu_N}, \quad \text{если} \quad \mu_s < \nu_{_N} - 1.$$

Тогда по теореме 1 у уравнения (15) нет целых трансцендентных решений.

Пусть $\mu_s = \nu_{_N} - 1$. Тогда уравнение (15) имеет два члена наибольшей разметности $d = \mu_s + 1 = \nu_{_N}$. Достаточные условия теоремы 2 в силу (16) выполняются, если $a_{\mu_s} \geqslant b_{\nu_{_N}} + \mathfrak{l}$. ■

Пример 4. Уравнение Якоби [138, с. 41 − 56; 118, с. 93 − 96]

$$\frac{dw}{dz} = \frac{a_1 z + b_1 w + c_1 + w\left(a_3 z + b_3 w + c_3\right)}{a_2 z + b_2 w + c_2 + z\left(a_3 z + b_3 w + c_3\right)}\,, \tag{17}$$

где a_i, b_i и c_i, $i \in \{1, 2, 3\}$, — некоторые, вообще говоря, комплексные постоянные, удовлетворяет условиям следствия 1.

Действительно, запишем уравнение (17) в виде

$$\begin{gathered}(a_3 z^2 + (a_2 + c_3)z + c_2 + (b_3 z + b_2)w)w' = \\ = a_1 z + c_1 + (a_3 z + b_1 + c_3)w + b_3 w^2,\end{gathered} \tag{17A}$$

соответствующем (16). При $b_3 \neq 0$ показатель степени $\mu_s = \mu_1 = 1$, а показатель степени $\nu_{_N} = \nu_2 = 2$, значит, $\mu_s = \nu_{_N} - 1$, кроме того, $a_{\mu_1} = 1$, $b_{\nu_2} = 0$ и $a_{\mu_s} = b_{\nu_{_N}} + 1$. При $b_3 = 0$, $b_2 \neq 0$ показатель степени $\mu_s = \mu_1 = 1$, а $\nu_{_N} = \nu_1 = 1$ или $\nu_{_N} = \nu_0 = 0$, значит, $\mu_s \neq \nu_{_N} - 1$.

Итак, при $|b_2| + |b_3| \neq 0$ для дифференциального уравнения (17A) условия следствия 1 выполняются, и уравнение Якоби не имеет целых трансцендентных решений.

Если заметить, что при $b_3 = b_2 = 0$ уравнение Якоби (17) вырождается в линейное дифференциальное уравнение, то может быть сформулировано следующее утверждение: *уравнение Якоби* (17) *не имеет целых трансцендентных решений*.

Пример 5. Рассмотрим уравнение

$$P_0(z)w^{(n)} + P_1(z)w^{(n-1)} + \ldots + P_{n-1}(z)w' + P_n(z)w = 0, \qquad (18)$$

где $P_0,\ P_1, \ldots , P_n$ — полиномы комплексного переменного z со следующим лексикографическим расположением членов

$$P_i\colon z \to \beta_i z^{b_i} + \ldots\,,\ \forall z \in \mathbb{C},\ i = \overline{0,n}\,,\ \beta_0 \neq 0.$$

Размерности всех членов уравнения (18) равны, а относительный вес каждого последующего члена меньше предыдущего.

При

$$b_0 \geqslant \delta + b_\delta\,,\ \delta = \overline{1,n}\,,$$

выполняются условия теоремы 2, и справедливо утверждение: *если коэффициенты* P_i *линейного дифференциального уравнения* (18) *такие, что*

$$\deg P_0(z) \geqslant \delta + \deg P_\delta(z),\ \delta = \overline{1,n}\,,$$

то уравнение (18) *не имеет целых трансцендентных решений.*

Например, уравнение Эйлера [138, с. 238 − 240]

$$a_n z^n w^{(n)} + a_{n-1} z^{n-1} w^{(n-1)} + \ldots + a_1 z w' + a_0 w = 0, \qquad (19)$$

где $a_i\,,\ i = \overline{0,n}\,,$ — некоторые, вообще говоря, комплексные числа, является частным случаем уравнения (18), и показатели степени коэффициентов P_i связаны соотношением:

$$\deg P_0(z) = \delta + \deg P_\delta(z) = n,\ \delta = \overline{1,n}\,.$$

Значит, *уравнение Эйлера* (19) *не имеет целых трансцендентных решений.*

Теорема 3. *При выполнении условий теоремы* 2 *решения уравнения* (1.1.1.1) *не имеют изолированных существенных особых точек.*

Доказательство. Допустим противное: решение $w\colon z \to w(z)$ уравнения (1.1.1.1) имеет вид

$$w(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} c_{-k} (z - z_0)^{-k} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k (z - z_0)^k = \tag{20}$$

$$= w_1 (z - z_0) + w_2 (z - z_0),$$

где ряды, представляющие функции

$$w\colon z \to w_1 (z - z_0) \quad \text{и} \quad w\colon z \to w_2 (z - z_0),$$

сходятся для $|z - z_0| > 0$ и $|z - z_0| < R$ соответственно.

Положим $t(z - z_0) = 1$. Тогда решение w, заданное рядами (20), запишем так:

$$w(z) = y(t) = w_1 \Big(\frac{1}{t}\Big) + w_2 \Big(\frac{1}{t}\Big) = y_1(t) + y_2(t).$$

В силу задания, функция y_1 является целой функцией, а функция y_2 определяется рядом

$$y_2(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\, t^{-k},$$

который сходится при $|t| > \dfrac{1}{R}$.

При этом будем иметь, что

$$\frac{d^k w}{dz^k} = (-1)^k t^{2k} y^{(k)} + A_1 t^{2k-1} y^{(k-1)} + \ldots + A_{k-1} t^{k+1} y',$$

где $A_i,\ i = \overline{1, k-1}$, — определённые постоянные, которые зависят от k, а $y^{(k)} = \dfrac{d^k y}{dt^k}$.

Пусть $M(r; y_1) = |y_1(\xi)|$. Тогда

$$y^{(k)}(\xi) = y_1^{(k)}(\xi) + y_2^{(k)}(\xi) = y_1^{(k)}(\xi)\bigl(1 + \widetilde{\eta}_k(\xi)\bigr) =$$

$$= \left(\frac{\nu(r)}{\xi}\right)^k y_1(\xi)\bigl(1 + \eta_k(\xi)\bigr),$$

где $\bigl|\widetilde{\eta}_k(\xi_s)\bigr| \to 0$ и $|\eta_k(\xi_s)| \to 0$ для последовательности допустимых ξ_s таких, что $|\xi_s| \to \infty$ при $s \to 0$, для всех $k = \overline{1, n}$; $\nu(r)$ есть центральный индекс целой функции y_1.

Отсюда

$$\begin{gathered}\frac{d^k w}{dz^k} = (-1)^k \left(\frac{\nu(r)}{\xi}\right)^k y_1(\xi)\xi^{2k}\bigl(1 + \eta_k(\xi)\bigr) + \\ + A_1\left(\frac{\nu(r)}{\xi}\right)^{k-1} y_1(\xi)\xi^{2k-1}\bigl(1 + \eta_{k-1}(\xi)\bigr) + \ldots + \\ + A_{k-1}\left(\frac{\nu(r)}{\xi}\right) y_1(\xi)\xi^{k+1}(1 + \eta_1(\xi)) = \\ = (-1)^k(\xi\nu(r))^k y_1(\xi)\bigl(1 + \varkappa_k(\xi)\bigr),\end{gathered} \tag{21}$$

где $\widetilde{z} - z_0 = \xi^{-1}$, $\bigl|\varkappa_k(\xi_s)\bigr| \to 0$ при $|\xi_s| \to \infty$.

Подставляя (21) в уравнение (1.1.1.1) в допустимых точках $\widetilde{z}$, получим равенство, аналогичное (6). В силу выполнения условий 1) − 5) теоремы 2, оно не может быть верным при $\bigl|\xi_k\bigr| \to \infty$, что и доказывает теорему 3. ■

Например, уравнение Якоби (17) не имеет изолированных особых точек.

Теорема 4. *При выполнении условий теоремы* 2 *только рациональные решения уравнения* (1.1.1.1) *имеют конечное число полюсов.*

Доказательство. Если уравнение (1.1.1.1) имеет решение $w\colon z \to w(z)$ с конечным числом полюсов и оно не является рациональной функцией, то существует полином $v\colon z \to v(z)$ такой, что $u\colon z \to w(z)v(z)$ будет целой трансцендентной функцией.

Поскольку

$$w^{(l)} = \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} u^{(n)} \left(\frac{1}{v}\right)^{(l-n)} =$$

$$= \frac{1}{v^{l+1}} \sum_{n=0}^{l} \binom{l}{n} v^{n} P_{l-n}\Big(v^{(l-n)}, \ldots, v', v\Big) u^{(n)},$$

где P_{l-n}, $n = \overline{0, l}$, — полиномы своих аргументов, причём $P_0(v) \equiv 1, \deg P_{l-n}\Big(v^{(l-n)}(z), ..., v'(z), v(z)\Big) \leqslant (n-l)(1-\deg v(z))$, $n = \overline{1, l}$, а

$$\Big(w^{(j)}\Big)^{\nu} = \frac{1}{v^{\nu(j+1)}} \sum_{r_0+\ldots+r_j=\nu} \binom{\nu}{r_0, \ldots, r_j} \cdot$$

$$\cdot \prod_{n=0}^{j} \left(\binom{j}{n} v^{n} P_{l-n}\Big(v^{(j-n)}, \ldots, v', v\Big) u^{(n)}\right)^{r_n},$$

где $\binom{\nu}{r_0, \ldots, r_j} = \dfrac{\nu}{r_0! r_1! \ldots r_j!}$ — биномиальный коэффициент, то с помощью замены $w = \dfrac{u}{v}$ уравнение (1.1.1.1) приводим к виду

$$\sum_{i=0}^{N} (v(z))^{A-(\mathfrak{m}_i+\varkappa_i)} B_i(z) \prod_{j=1}^{s_i} \Bigg\{ \sum_{r_0+\ldots+r_j=\nu_{j_i}} \binom{\nu_{j_i}}{r_0, \ldots, r_j} \cdot \tag{22}$$

$$\cdot \prod_{n=0}^{l_{k_i}} \left(\binom{l_{k_i}}{n} (v(z))^{n} P_{j-n}\Big(v^{(j-n)}, \ldots, v', v\Big) u^{(n)} \right)^{r_n} \Bigg\},$$

где $A = \max\limits_{i=\overline{0,N}} \{\mathfrak{m}_i + \varkappa_i\}$.

В уравнении (22) все слагаемые в фигурных скобках имеют одинаковую размерность ν_{j_i}. Если выполнить операцию умножения, то все слагаемые, соответствующие зафиксированному i, имеют одинаковую размерность $\varkappa_i$, равную размерности i-го члена уравнения (1.1.1.1). Положим, что справедливо условие 1) теоремы 2.

Среди членов уравнения (22) с одинаковой размерностью d при каждом фиксированном $i \in \{0, 1, \ldots, p\}$ выделим те, у которых максимальный относительный вес. Поскольку при умножении относительные веса складываются, то члены с максимальным относительным весом должны содержать $u^{(j)}$, то есть, при каждом фиксированном i максимальный относительный вес равен числу $\mathfrak{m}_i$, соответствующему относительному весу i-го члена уравнения (1.1.1.1). Запишем это с помощью соотношения:

$$\begin{gathered} \mathfrak{m}_0 = \ldots = \mathfrak{m}_h = \mathfrak{m},\ \mathfrak{m} > \mathfrak{m}_\delta,\ \mathfrak{m} > \mathfrak{m}_{t_\tau}, \\ 0 \leqslant h \leqslant p,\ \delta = \overline{h+1, p},\ t = \overline{0, p}, \end{gathered} \tag{23}$$

где $\mathfrak{m}_{t_\tau}$ — веса тех членов уравнения (22), у которых $\varkappa_{t_\tau} = \varkappa_t$.

Соотношение (23) для уравнения (22) соответствует условию 2) теоремы 2 для уравнения (1.1.1.1).

Поскольку

$$A - (\mathfrak{m}_0 + \varkappa_0) = \ldots = A - (\mathfrak{m}_h + \varkappa_h),$$

то для выделенных членов выполняется условие 3) теоремы 2.

Заметим, что установленное расположение членов в уравнениях (1.1.1.1) и (22) не требует каких-либо ограничений на эти уравнения.

Для слагаемых уравнения (22), расположенных в фигурных скобках, абсолютные веса равны

$$\sum_{n=0}^{s_i} r_n\Big(n(-1+\deg v(z)) + \deg P_{j-n}\Big(v^{(j-n)}(z), \ldots, v'(z), v(z)\Big)\Big),$$

и (с учётом свойства показателя степени $\deg P_{j-n}(z)$) будут такими, что

$$\sum_{n=0}^{s_i} r_n\Bigl(n(-1+\deg v(z))+$$

$$+\deg P_{j-n}\Bigl(v^{(j-n)}(z),\ldots,v'(z),v(z)\Bigr)\Bigr)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=0}^{s_i} r_n(n(-1+\deg v(z))+(j-n)(-1+\deg v(z)))=$$

$$=s_i\nu_{j_i}(-1+\deg v(z)).$$

Тогда для каждого члена уравнения (22), соответствующего $i\in\{0,1,\ldots,N\}$, абсолюный вес меньше или равен

$$b_i+\bigl(A-\bigl(\mathfrak{m}_i+\varkappa_i\bigr)\bigr)\deg v(z)+\sum_{j=1}^{s_i} l_{k_i}\nu_{j_i}(-1+\deg v(z))=$$

$$=b_i-\mathfrak{m}_i+\bigl(A-\varkappa_i\bigr)\deg v(z).$$

Для выделенных же членов уравнения (22) с номерами $l\in\{0,1,\ldots,\lambda\}$ показатель степени $\deg P_0(v(z))=0$, а значит, абсолютный вес равен

$$b-\mathfrak{m}+(A-d)\deg v(z).$$

Требование, аналогичное условию 4) теоремы 2, для уравнения (22) имеет вид

$$b-\mathfrak{m}\geqslant\mathfrak{n}_\delta,\ \delta=\overline{h+1,p},\ b-\mathfrak{m}\geqslant\mathfrak{n}_{t_\tau},\ t=\overline{0,p}\,.$$

Оно соответствует условию 4) теоремы 2.

Условие 5) теоремы 2 для дифференциальных уравнений (1.1.1.1) и (22) одинаково.

Отсюда заключаем, что при выполнении условий теоремы 2 уравнение не имеет целых трансцендентных решений, а значит, любое решение уравнения (1.1.1.1), отличное от рационального, либо не имеет полюсов, либо имеет бесконечно много полюсов. Теорема доказана. ■

Единственной неподвижной особой точкой первого неприводимого уравнения Пенлеве (1.0.4.1) является $z = \infty$. Эта точка существенно особая для каждого решения.

Следовательно, *уравнение* (1.0.4.1) *не имеет рациональных решений.*

Как и в [57, с. 156], на основании теорем 3 и 4 в силу того, что у (1.0.4.1) единственный доминирующий член $6w^2$, заключаем

Теорема 5. *Все решения первого неприводимого уравнения Пенлеве* (1.0.4.1) *имеют бесконечное число полюсов, сгущающихся к бесконечно удалённой точке.*

Пенлеве доказал, что уравнение (1.0.4.1) имеет только подвижные полюсы z_0 с главной частью $(z-z_0)^{-2}$. Следовательно, общее решение уравнения (1.0.4.1) является мероморфной функцией, то есть, представимо в виде отношения двух целых функций.

Так, например, в [56] Н.П. Еругин строит решения первого неприводимого уравнения Пенлеве в виде $w = \dfrac{u}{v}$, где u и v являются целыми трансцендентными функциями.

Второе неприводимое уравнение Пенлеве (2.0.4.1) имеет один доминирующий член $2w^3$, и четвёртое неприводимое уравнение Пенлеве (5.0.4.1) также имеет один доминирующий член $3w^4$.

Известно, что уравнения (2.0.4.1) [11; 149] и (5.0.4.1) [96; 99] имеют рациональные решения. На основании теоремы 4 заключаем, что *только рациональные решения второго и четвёртого уравнений Пенлеве имеют конечное число полюсов.*

А учитывая, что любое решение уравнений (2.0.4.1) [14; 55] и (5.0.4.1) [55; 99; 96] является функцией мероморфной, то будет справедлива

Теорема 6. *Любое решение второго и четвёртого неприводимых уравнений Пенлеве, отличное от рационального, имеет бесконечное число полюсов.*

Более того, в [94] доказана

Теорема 7. *При любом* α *всякое решение дифференциального уравнения* (2.0.4.1)*, отличное от рационального и* *решений уравнений*

$$w' = \pm\Bigl(w^2 + \frac{z}{2}\Bigr), \tag{24}$$

имеет бесконечное число полюсов как с вычетами 1, *так и с вычетами* -1. *Число положительных вычетов полюсов рациональных решений определяется формулой* $\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}$, *отрицательных —* $\dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}$. *Каждое решение уравнений* (24) *имеет бесконечное число полюсов, вычеты всех полюсов любого такого решения одного знака:* 1 *для* $\alpha = -\dfrac{1}{2}$; -1 *для* $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

При доказательстве теоремы 7 в [148] использован тот факт, что при $\alpha = \pm\dfrac{1}{2}$ все решения уравнения Риккати (24) являются решениями уравнения (2.0.4.1).

Следуя [96; 99], заключаем, что при

$$\beta + 2(1+\alpha)^2 = 0 \tag{25}$$

все решения уравнения Риккати

$$w' = w^2 + 2zw - 2(1+\alpha) \tag{26}$$

являются решениями уравнения (5.0.4.1), а при

$$\beta + 2(1-\alpha)^2 = 0 \tag{27}$$

все решения уравнения Риккати

$$w' = -w^2 - 2zw - 2(1-\alpha)$$

являются решениями уравнения (5.0.4.1).

Справедлива

Теорема 8. *Всякое решение уравнения* (5.0.4.1)*, отличное от рационального и решений уравнений* (26) *при* (25) *и* (28) *при* (27)*, имеет бесконечное число полюсов с вычетами* 1 *и бесконечное число полюсов с вычетами* -1. *Любой полюс решения уравнения* (26) *имеет вычет* -1, *а любой полюс решения уравнения* (28) *имеет вычет* 1.

Третье неприводимое уравнение Пенлеве (3.0.4.1) имеет один доминирующий член $\gamma z w^4$ при $\gamma \neq 0$, если $\gamma = 0, \alpha \neq 0$, то также имеет один доминирующий член αw^3. Если же $\alpha = \gamma = 0$, то наибольшую размерность и относительный вес имеют члены zww'' и $z(w')^2$, расположенные в левой и правой частях равенства, т.е. не выполняется условие 5) теоремы 2.

Известно [94], что при $\alpha = \gamma = 0$ уравнение (3.0.4.1) интегрируется в элементарных функциях.

Поскольку уравнение (3.0.4.1) имеет рациональные решения [41;43; 44; 94], то на основании теоремы 4 заключаем

Теорема 9. *При* $|\alpha| + |\gamma| \neq 0$ *только рациональные решения третьего неприводимого уравнения Пенлеве* (3.0.4.1) *имеют конечное число полюсов.*

Отметим, что уравнение (3.0.4.1) может иметь критические полюса [94], и естественно, что на такие решения теорема 9 не распространяется.

Известно [55], что решения уравнения (3.0.4.1), для которых точка $z = 0$ — полюс или голоморфная точка, являются мероморфными функциями.

В [94] доказана

Теорема 10. *Если*

$$\gamma \neq 0,\ zw_1' + \Big(2 - \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}\Big)w_1 - \beta \neq 0,\ zw_2' + \Big(2 - \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}\Big)w_2 - \beta \neq 0,$$

где

$$w_1 = w' - \sqrt{\gamma}\, w^2 + \Big(1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}\Big)\frac{w}{z}\,,\ w_2 = w' + \sqrt{\gamma}\, w^2 + \Big(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma}}\Big)\frac{w}{z}\,,$$

то всякое, отличное от рационального, решение уравнения (3.0.4.1), *имеющее в точке* $z = 0$ *полюс или точку голо-*

морфности, имеет бесконечное число полюсов как с вычетом $\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}$, *так и с вычетом* $-\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}$.

При выполнении некоторых других соотношений между параметрами полюсы будут только с вычетами $\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}$ или $-\dfrac{1}{\sqrt{\gamma}}$, или, наконец, при некоторых соотношениях между параметрами эти решения будут иметь подвижные полюсы второго порядка с вычетами, равными нулю.

Рассмотрим пятое неприводимое уравнение Пенлеве (6.0.4.1).

Известно, [40; 45; 142] что уравнение (6.0.4.1) имеет рациональные решения.

При $\gamma = \delta = 0$ уравнение (6.0.4.1) интегрируется в элементарных функциях.

Если $\alpha \neq 0$, то уравнение (6.0.4.1) имеет один доминирующий член $2\alpha w^5$.

Если $\alpha = \gamma = \delta = 0$, то доминирующими членами являются

$$2z^2 w'' w^2, \ -3z^2 (w')^2 w, \ 2zw' w^2, \ -2\beta w^3.$$

Если считать, что они расположены в порядке записи, то

$$\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m} = 2, \ \mathfrak{m} > \mathfrak{m}_\delta, \ \delta \in \{2, 3\}, \ \mathfrak{m}_2 = 1, \ \mathfrak{m}_3 = 0,$$

$$b_0 = b_1 = b = 2, \ \mathfrak{n}_0 = \mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}_2 = \mathfrak{n}_3 = 0,$$

а $\beta_0 + \beta_1 = 1$, т.е. выполняются условия теоремы 2.

Тогда на основании теорем 3 и 4 можем утверждать

Теорема 11. *Если* $\alpha \neq 0$ *или* $\alpha = \gamma = \delta = 0$, *то у пятого уравнения Пенлеве:*

1) *нет целых трансцендентных решений;*

2) *нет решений с изолированными существенно особыми точками;*

3) *только рациональные решения имеют конечное число полюсов.*

Если $\alpha = 0$, $|\gamma| + |\delta| \neq 0$, то нарушается условие 4) теоремы 2 и уравнение (6.0.4.1) может иметь целые трансцендентные решения [98].

В частности, если

$$\alpha=\beta=0,\ \gamma^2+2\delta=0,\ \delta\neq 0,$$

то уравнение (6.0.4.1) имеет однопараметрическое семейство решений [97, с. 119]

$$w\colon z\to C\exp(\gamma z),\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

Рассмотрим шестое неприводимое уравнение Пенлеве (9.0.4.1).

Известно [97, с. 183 − 186; 96], что уравнение (9.0.4.1) имеет рациональные решения.

При $\alpha\neq 0$ уравнение (9.0.4.1) имеет один доминирующий член $2\alpha w^6$.

Пусть $\alpha=0$. Тогда доминирующими членами с размерностью $d=4$ являются

$$2z^2(z-1)^2w^3w''w^3,\ -3z^2(z-1)^2(w')^2w^2,$$

$$4z^2(z-1)w'w^3,\ -2(\delta z^2+(\beta+\gamma-\delta)z-\gamma)w^4,$$

Если считать, что доминирующие члены расположены в порядке записи, то

$$\mathfrak{m}_0=\mathfrak{m}_1=\mathfrak{m}=2,\ \mathfrak{m}>\mathfrak{m}_j,\ j\in\{2,3\},\ \mathfrak{m}_2=1,\ \mathfrak{m}_3=0,$$

$$b_0=b_1=b=4,\ b-\mathfrak{m}=\mathfrak{n}=2,\ \mathfrak{n}\geqslant\mathfrak{n}_j,\ j\in\{2,3\},\ \mathfrak{n}_2=2,$$

$$\mathfrak{n}_3=\left[\begin{array}{l}2,\ \text{если}\ \delta\neq 0,\\ 1,\ \text{если}\ \delta=0,\beta+\gamma\neq 0,\\ 0,\ \text{если}\ \delta=0,\beta+\gamma=0,\gamma\neq 0,\end{array}\right.$$

если же $\delta=\beta=\gamma=0$, то доминирующего члена с номером $j=3$ нет; $\beta_0+\beta_1\neq 0$.

Итак, для дифференциального уравнения (9.0.4.1) выполняются условия теоремы 2.

Тогда с учётом теорем 3 и 4 справдлива

Теорема 12. *У шестого неприводимого дифференциального уравнения Пенлеве:*

1) *нет целых трансцендентных решений;*

2) *нет решений с изолированными существенно особыми точками;*

3) *только рациональные решения имеют конечное число полюсов.*

В [104; 107; 108] из всего множества уравнений

$$\begin{gathered} w^2w'w''' - w^4w''' - \Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big)w^2(w'')^2 - a_1 w(w')^2w'' + \\ + \Big(4\Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big) - a + a_1\Big)w^3w'w'' + aw^5w'' - \widetilde{b}_1(w')^4 + \\ + (\widetilde{b}_1 - b)w^2(w')^3 + \Big(-4\Big(1 - \frac{1}{\nu}\Big) - c + b\Big)w^4(w')^2 + \\ + (c-d)w^6ww' + dw^8 = 0 \end{gathered} \tag{29}$$

выделяются классы, решения которых свободны от подвижных критических особенностей.

Если а) $d \neq 0$, или б) $d = 0$, $c \neq 0$, или в) $c = d = 0$, $\nu \neq \dfrac{4}{4-a+b}$, или г) $a = b = c = d = 0$, $\nu = 1$, $a_1 + \widetilde{b}_1 \neq 1$, то выполняются условия теоремы 2.

Тогда с учётом теорем 3 и 4, справедлива

Теорема 13. *Если а)* $d \neq 0$, *или б)* $d = 0, c \neq 0$, *или в)* $c = d = 0$, $\nu \neq \dfrac{4}{4-a+b}$, *или г)* $a = b = c = d = 0, \nu = 1$, $a_1 + \widetilde{b}_1 \neq 1$, *то у уравнения* (29):

1) *нет целых трансцендентных решений;*

2) *нет решений с изолированными существенно особыми точками;*

3) *только рациональные решения имеют конечное число полюсов.*

Теорема 14. *Пусть* w *— целое трансцендентное решение уравнения* (1.1.1.1). *Если выполняются условия:*

1) $\varkappa_0 = \ldots = \varkappa_p = d,\ d > \varkappa_\eta,\ 0 \leqslant p \leqslant N,\ \eta = \overline{p+1, N}$;

2) $\mathfrak{m}_0 = \ldots = \mathfrak{m}_h = \mathfrak{m},\ \mathfrak{m} > \mathfrak{m}_\delta,\ 0 \leqslant h \leqslant p,\ \delta = \overline{h+1, p}$;

3) $b_0 = \ldots = b_\lambda = b,\ b > b_\tau,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant h,\ \tau = \overline{\lambda+1, h}$;

4) *существует* $\delta \in \{h+1, \ldots, p\}$ *такое, что* $b - \mathfrak{m} < b_\delta - \mathfrak{m}_\delta$;

5) $\sum\limits_{l=0}^{\lambda} \beta_l \neq 0$,

то порядок ρ *решения* w *удовлетворяет неравенству*

$$\rho \leqslant \max_{\delta=\overline{h+1,p}} \left\{ \frac{(b-\mathfrak{m}) - (b_\delta - \mathfrak{m}_\delta)}{\mathfrak{m}_\delta - \mathfrak{m}} \right\}.$$

Теорема 15. *Пусть* w *— целое трансцендентное решение уравнения* (1.1.1.1). *Если выполняются условия:*

1) $\varkappa_0 = \ldots = \varkappa_p = d,\ d > \varkappa_\eta,\ 0 \leqslant p \leqslant N,\ \eta = \overline{p+1, N}$;

2) $\mathfrak{m}_0 = \ldots = \mathfrak{m}_h = \mathfrak{m},\ \mathfrak{m} < \mathfrak{m}_\delta,\ 0 \leqslant h \leqslant p,\ \delta = \overline{h+1, p}$;

3) $b_0 = \ldots = b_\lambda = b,\ b > b_\tau,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant h,\ \tau = \overline{\lambda+1, h}$;

4) $\sum\limits_{l=0}^{\lambda} \beta_l \neq 0$,

то порядок ρ *решения* w *удовлетворяет неравенству*

$$\rho \geqslant \min_{\delta=\overline{h+1,p}} \left\{ \frac{(b-\mathfrak{m}) - (b_\delta - \mathfrak{m}_\delta)}{\mathfrak{m}_\delta - \mathfrak{m}} \right\}.$$

Доказательство теорем 14 и 15. Рассуждениями, аналогичными использованным при доказательстве теоремы 2, устанавливаем справедливость соотношений (8), (9) и (11).

Изменится лишь (10).

Действительно, центральный индекс целой трансцендентной функции w такой, что $\operatorname{typ} w(z) = \rho$, удовлетворяет асимптотическому равенству

$$\nu(r) \sim \alpha r^{\rho}.$$

Тогда при $|\xi_k| \to +\infty$ для всех $\delta = \overline{h+1, p}$ имеет место

$$\left|\frac{B_{\mu_\delta}(\xi_k)}{B_{\mu_0}(\xi_k)}\right| \left(\frac{\nu(r)}{|\xi_k|}\right)^{\mathfrak{m}_\delta - \mathfrak{m}} \sim \alpha \left|\frac{\beta_\delta}{\beta_0}\right| |\xi_k|^{(p-1)(\mathfrak{m}_\delta - \mathfrak{m}) + b_\delta - b} \to 0, \quad (31)$$

если только:

а) при $\mathfrak{m} < \mathfrak{m}_\delta$ порядок

$$\rho < \frac{(b - \mathfrak{m}) - \left(b_\delta - \mathfrak{m}_\delta\right)}{\mathfrak{m}_\delta - \mathfrak{m}}, \ \delta = \overline{h+1, p};$$

б) при $\mathfrak{m} > \mathfrak{m}_\delta$ порядок

$$\rho > \frac{(b - \mathfrak{m}) - \left(b_\delta - \mathfrak{m}_\delta\right)}{\mathfrak{m}_\delta - \mathfrak{m}}, \ \delta = \overline{h+1, p}.$$

Переходя в равенстве (7) к пределу при $|\xi_k| \to +\infty$, на основании (8), (9), (11) и (31), получим равенство

$$1 + \sum_{l=1}^{\lambda} \frac{\beta_l}{\beta_0} = 0,$$

которое противоречит условиям теорем 14 и 15. Что и доказывает эти теоремы. ■

2. Целые трансцендентные решения уравнений с целыми коэффициентами

Рассмотрим неалгебраическое дифференциальное уравнение

$$\sum_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(z) \prod_{k=1}^{s_i} \left(w^{\left(l_{k_i}\right)}\right)^{\nu_{k_i}} = 0, \quad (1)$$

где μ_i, l_{k_i} и ν_{k_i}, $k_i = \overline{1, s_i}$, $i = \overline{0, N}$, есть целые неотрицательные числа, а коэффициенты B_{μ_i}, $i=\overline{0,N}$, — являются целыми функциями: если B_{μ_i} — полином, то он имеет лексикографическое расположение членов (2.1.1.1); если B_{μ_i} — целая трансцендентная функция, то $\rho_i = \operatorname{ord} B_{\mu_i}(z)$ — порядок, $\sigma_i = \operatorname{typ} B_{\mu_i}(z)$ есть тип этой целой трансцендентной функции.

Теорема 1. *Если выполняются условия:*

1) $\varkappa_0 = \ldots = \varkappa_p = d,\ d > \varkappa_\eta,\ 0 \leqslant p \leqslant N,\ \eta = \overline{p+1,N}$;

2) $\mathfrak{m}_0 = \ldots = \mathfrak{m}_h = \mathfrak{m},\ \mathfrak{m} > \mathfrak{m}_\delta,\ 0 \leqslant h \leqslant p,\ \delta = \overline{h+1,p}$;

3) $B_{\mu_0}, \ldots, B_{\mu_p}$ — *полиномы такие, что*

а) $b_0 = \ldots = b_\lambda = b,\ b > b_\tau,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant h,\ \tau = \overline{\lambda+1,h}$;

б) $b - \mathfrak{m} \geqslant b_\delta - \mathfrak{m}_\delta,\ \delta = \overline{h+1,p}$;

в) $\sum\limits_{i=0}^{\lambda} \beta_i \neq 0$,

4) $\rho_{p+1} = \ldots = \rho_{p+\alpha} = \rho,\ \rho > \rho_\gamma,\ 1 \leqslant \alpha \leqslant N-p$,

$\gamma = \overline{p+\alpha+1,N}$;

5) $\sigma_{p+1} = \ldots = \sigma_{p+\zeta} = \sigma,\ \sigma > \sigma_\varepsilon,\ 1 \leqslant \zeta \leqslant \alpha$,

$\varepsilon = \overline{p+\zeta+1,p+\alpha}$,

то уравнение (1) *не имеет целых трансцендентных решений* $w\colon z \to w(z)$ *таких, что* $\operatorname{ord} w(z) = \rho,\ \operatorname{typ} w(z) > \sigma$ *или* $\operatorname{ord} w(z) > \rho$.

Доказательство. Пусть $w\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ — целое трансцендентное решение уравнения (1) такое, что $\operatorname{ord} w(z) > \rho$.

Производные $w^{(j)}$ могут быть выражены через саму функцию w и её центральный индекс $\nu(r)$ в допустимых точках ξ таких, что $|w(\xi)| = M(r;w)$, по формуле (8.0.1).

Рассуждениями, аналогичными, как и при доказательстве теоремы 2.1, приходим к равенству

$$1 + \varepsilon_0(\xi) + \sum_{l=1}^{\lambda} \frac{B_{\mu_l}(\xi)}{B_{\mu_0}(\xi)}\,(1+\varepsilon_l(\xi)) + \sum_{\tau=\lambda+1}^{h} \frac{B_{\mu_\tau}(\xi)}{B_{\mu_0}(\xi)}\,(1+\varepsilon_\tau(\xi)) +$$

$$+\sum_{\delta=h+1}^{p}\frac{B_{\mu_\delta}(\xi)}{B_{\mu_0}(\xi)}\left(\frac{\nu(r)}{\xi}\right)^{\mathfrak{m}_\delta-\mathfrak{m}}\bigl(1+\varepsilon_\delta(\xi)\bigr)+ \qquad (2)$$

$$+\sum_{\eta=p+1}^{N}\frac{B_{\mu_\eta}(\xi)}{B_{\mu_0}(\xi)}\,w^{\varkappa_\eta-d}(\xi)\left(\frac{\nu(r)}{\xi}\right)^{\mathfrak{m}_\eta-\mathfrak{m}}(1+\varepsilon_\eta(\xi))=0.$$

Так как $\operatorname{ord} w>\rho$, т.е. $\operatorname{ord} w>\rho_\eta$, $\eta=\overline{p+1,N}$, и $\varkappa_\eta<d$, то всегда можно указать последовательность ξ_k такую, что при

$$\frac{B_{\mu_\eta}(\xi_k)}{B_{\mu_0}(\xi_k)}\,w^{\varkappa_\eta-d}(\xi_k)\Bigl(\frac{\nu(r)}{\xi_k}\Bigr)^{\mathfrak{m}_\eta-\mathfrak{m}}\to 0,\ \eta=\overline{p+1,N}\,. \qquad (3)$$

Полиномы B_{μ_i}, $i=\overline{0,p}$, связаны соотношениями а) – б), а значит, при $|\xi_k|\to+\infty$ имеют место соотношения (8.1) – (10.1).

Переходя в равенстве (2) к пределу при $|\xi_k|\to+\infty$, на основании (3), (8.1) – (10.1) будем иметь, что

$$1+\sum_{l=1}^{\lambda}\frac{\beta_l}{\beta_0}=0. \qquad (4)$$

Последнее равенство противоречит условию 3в). Значит, уравнение (1) не имеет целых трансцендентных решений w с порядками $\operatorname{ord} w(z)>\rho$.

Пусть $w\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ — целое трансцендентное решение уравнения (1) такое, что $\operatorname{ord} w(z)=\rho$. Последнюю сумму в (2) разобьём на две:

$$\sum_{t=p+1}^{p+\alpha}R_t(\xi)+\sum_{u=p+\alpha+1}^{N}R_u(\xi),$$

где

$$R_\eta(\xi)=\frac{B_{\mu_\eta}(\xi)}{B_{\mu_0}(\xi)}\,w^{\varkappa_\eta-d}(\xi)\left(\frac{\nu(r)}{\xi}\right)^{\mathfrak{m}_\eta-\mathfrak{m}}(1+\varepsilon_\eta(\xi)).$$

Положим, что $\operatorname{typ} w(z) > \sigma$ при $\operatorname{ord} w(z) = \rho$. Тогда при всех $\eta = \overline{p+1, N}$ существует последовательность допустимых ξ_n таких, что при $|\xi_n| \to +\infty$

$$R_t(\xi) \to 0,\ t = \overline{p+1, p+\alpha}\,, \tag{5}$$

в силу условий 4) – 5):

$$R_u(\xi) \to 0,\ u = \overline{p+\alpha+1, N}\,. \tag{6}$$

На основании предельного перехода в равенстве (2) при $|\xi_n| \to +\infty$ с учётом (5), (6), (8.1) – (10.1) получаем равенство (4), которое противоречит условию 3в). Значит, уравнение (1) не имеет целых трансцендентных решений w таких, что $\operatorname{ord} w(z) = \rho$, $\operatorname{typ} w(z) > \sigma$. ■

3. Целые трансцендентные решения с конечным числом нулей

Вопрос о наличии и свойствах целых трансцендентных решений с конечным числом нулей рассмотрим на основании дифференциального уравнения первого порядка типа Риккати – Абеля

$$D(z)w' = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{s_i} A_{ij}(z) \exp B_{ij}(z) w^i,\ n \geqslant 2, \tag{1}$$

где A_{ij}, B_{ij}, $i = \overline{0, n}$, $j = \overline{1, s_i}$, D — полиномы комплексного переменного z, $B_{ir}(z) - B_{il}(z) \not\equiv \text{const}$ для $i = \overline{0, n}$ при $r \neq l$.

Решения уравнения (1) будем искать в виде целой функции с конечным числом нулей или вовсе без нулей

$$w\colon z \to P(z) \exp \mathfrak{G}(z),\ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

где P — полином степени $p \geqslant 0$, $\mathfrak{G}$ — некоторая целая функция.

Теорема 1. *Любое решение уравнения* (1) *вида* (2) *будет таким, что целая функция* $\mathfrak{G}$ *является полиномом.*

Доказательство. Целая функция (2) будет решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда

$$D(z)\big(P'(z)+P(z)\mathfrak{G}'(z)\big)\exp\mathfrak{G}(z) = \\ = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{s_i} A_{ij}(z)\exp\big(B_{ij}(z)+i\mathfrak{G}(z)\big)P^i(z),\ \forall z\in\mathbb{C}. \tag{3}$$

Необходимым условием тождества (3) является либо выполнение хотя бы одного из тождеств

$$B_{ij}(z)+i\mathfrak{G}(z) = B_{kl}(z)+k\mathfrak{G}(z)+C_{ik},\ \forall z\in\mathbb{C}, \tag{4}$$

где $i,k\in\{0,1,\ldots,n\}, j\in\{1,2,\ldots,s_i\}, l\in\{1,2,\ldots,s_k\}, i\neq k$, $C_{ik}\in\mathbb{C}$, либо то, что уравнение (1) имеет вид

$$D(z)w' = A_{n1}(z)\exp B_{n1}(z)w^n,\ n\geqslant 2. \tag{5}$$

Тождество (4) имеет место лишь при условии, что целая функция $\mathfrak{G}$ — полином.

Уравнение (5) является нелинейным, а поскольку у целой функции и её производной порядки и типы одинаковы [91, с. 15], то все его целые решения без нулей имеют конечный порядок.

Действительно, если w — целое решение без нулей, то частное $\dfrac{w'}{w^n}$ — целая фнкция. Тогда целой функцией будет и $\dfrac{A_{n1}}{D}\exp B_{n1}$, у которой конечный порядок, так как она есть результат деления целой функции конечного порядка на полином [91, с. 37]. В этом случае

$$\frac{w^{1-n}(z)}{(1-n)} = \int \frac{A_{n1}(z)}{D(z)}\exp B_{n1}(z)\,dz$$

имеет конечный порядок, то есть, w — целая функция без нулей с конечным порядком. В силу [102, с. 515] w имеет вид (2), где $P(z)\equiv\mathrm{const}$, $\mathfrak{G}$ — полином, ибо у неё исключительное значение нуль.

Если w — целое трансцендентное решение уравнения (5) с конечным числом нулей, то оно может быть представлено в виде

$$w\colon z \to P(z)u(z),$$

где P — полином, а u — целая трансцендентная функция без нулей. Тогда уравнение (5) в новых переменных будет иметь вид

$$D(z)P(z)u' =$$

$$= -D(z)P'(z)u + A_{n1}(z)\exp B_{n1}(z)P^n(z)\exp(B_{n1}(z))u^n.$$

Целые решения u без нулей у этого уравнения могут быть лишь при выполнении тождеств (4), то есть, когда

$$u\colon z \to \exp \mathfrak{G}(z),\ \forall z \in \mathbb{C},$$

где $\mathfrak{G}$ — полином. ■

Рассмотрим решения уравнения (1) в виде целой трансцендентной функции без нулей

$$w\colon z \to \exp \mathfrak{G}(z),\ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

где $\mathfrak{G}$ — некоторый полином комплексного переменного z, отличный от постоянной.

Функция (6) является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда выполняется тождество (3) при $P(z) \equiv 1$. Для этого необходимо, чтобы

$$\mathfrak{G}(z) = \frac{1}{1-l}\, B_{ls}(z) + C_l,\ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{7}$$

где $l \in \{0, 2, 3, \ldots, n\}$, $s \in \{1, 2, \ldots, s_l\}$.

Если ни при одном $l \in \{0, 2, 3, \ldots, n\}$ не имеет место представление (7), то хотя бы при одном $j \in \{1, 2, \ldots, s_1\}$

$$\mathfrak{G}(z) = (\exp b_{1j}) \int \frac{A_{1j}(z)}{D(z)}\, dz + C,\ \forall z \in \mathbb{C},\ C = \text{const}, \tag{8}$$

где

$$B_{1j}: z \to b_{1j},\ \forall z \in \mathbb{C},\ b_{1j} = \text{const}.$$

Если имеет место представление (7), то каждый полином B_{ij} будет таким, что для него выполняются тождество (7) или тождество (4). Это возможно, если только уравнение (1) имеет вид

$$D(z)w'(z) = \sum_{i=0}^{m} \exp G_i(z) \biggl(w^{r_{i0}} F_{i0}(z) + \exp\Bigl(\frac{r_{i0}}{1-l}\, B_{ls}(z) + \\ + r_{i0} C_l\Bigr) \sum_{j=1}^{t_i} F_{ij}(z) \exp\Bigl(\frac{r_{ij}}{l-1}\, B_{ls}(z) + r_{ij} C_l\Bigr) w^{r_{ij}} \biggr), \tag{9}$$

где $G_0 = B_{ls}, r_{00} = l, G_i \in \bigl\{B_{\lambda\eta} : \lambda = \overline{0, n}\,, \eta = \overline{1, s_\lambda}\,\bigr\}$, при $i \neq k$ разность $G_i(z) - G_k(z) \not\equiv \text{const}$, для каждого $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ при $F_{k0}(z) \not\equiv 0$ сумма

$$\sum_{j=1}^{t_k} |F_{kj}(z)| \not\equiv 0.$$

Если $\mathfrak{G}$ определяется по формуле (8) при некотором $j = \tau$ и ни при одном $l \in \{0, 2, 3, \ldots, n\}$ не имеют места представления (7), то полиномы B_{ij} должны удовлетворять тождеству (4) при $i = 1,\ j \neq \tau$. Тогда уравнение (1) будет иметь вид

$$D(z)w' = \sum_{i=0}^{m} \exp G_i(z) \Bigl(w^{r_{i0}} F_{i0}(z) + \\ + \exp\Bigl((r_{i0} \exp b_{1\tau}) \int \frac{A_{1\tau}(z)}{D(z)}\, dz + r_{i0} C \Bigr) \cdot \tag{10}$$

$$\cdot \sum_{j=1}^{t_i} F_{ij}(z) \exp\Bigl(\bigl(-r_{ij} \exp b_{1\tau} r\bigr) \int \frac{A_{1\tau}}{D(z)}\, dz - r_{ij} C\Bigr) w^{r_{ij}}\Bigr),$$

где

$$G_0 = B_{1\tau},\ B_{1\tau} \equiv b_{1\tau} = \mathrm{const}, r_{00} = 1,$$

$$G_i \in \bigl\{ B_{\lambda\eta} \colon \lambda = \overline{0,n}, \eta = \overline{1, s_\lambda}\,\bigr\}, F_{ij} \in \bigl\{ A_{\lambda\eta} \colon \lambda = \overline{0,n},\ \eta = \overline{1, s_\lambda}\,\bigr\},$$

при $i \neq k$ разность $G_i(z) - G_k(z) \not\equiv \mathrm{const}$, при $F_{k0} \not\equiv 0$ для каждого $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ сумма

$$\sum_{j=1}^{t_k} \bigl| F_{kj}(z) \bigr| \not\equiv 0.$$

Таким образом, доказано

Свойство 1. *Для того чтобы уравнение* (1) *имело решение в виде целой трансцендентной функции без нулей* (6)*, небходимо, чтобы это уравнение имело вид* (9) *или* (10). *При этом полином* $\mathfrak{G}$ *в формуле* (6) *зависит от видов* (9) *и* (10) *уравнения* (1).

Если функция $\dfrac{A_{1j}}{D}$ имеет полюс, то целая функция $\mathfrak{G}$, определяемая по формуле (8), не является полиномом, и справедливо

Свойство 2. *Дифференциальное уравнение* (1) *приводится к виду* (10) *только для тех* $\tau \in \{1, 2, \ldots, s_1\}$, *при которых частное* $\dfrac{A_{1\tau}}{D}$ *является полиномом.*

В заключение этого случая отметим, что $w(z) = \mathrm{const}$ может быть решением уравнения (1), если тождества (4) выполняются при всех $i, k \in \{0, 1, \ldots, n\}, j \in \{1, 2, \ldots, s_i\}, k \in \{1, 2, \ldots, s_k\}$, когда $i \neq k$.

Найдём решения уравнения (1) в виде целой функции с конечным числом нулей (2), где P и $\mathfrak{G}$ — полиномы комплексного переменного z степеней $\deg P(z) = p > 0$ и $\deg \mathfrak{G}(z) = \mathfrak{g} \geqslant 0$.

Из тождества (3) следует, что

$$\mathfrak{G}(z) = B_{ij}(z) + i\mathfrak{G}(z) + C_i, \ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{11}$$

где $C_i = \text{const}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, s_i\}$.

Пусть представление (11) имеет место соответственно при $i = k_0, \ldots, i = k_h$ и $j = \tau_0, \ldots, j = \tau_h$. Тогда из тождества (3) выделим тождество

$$D(z)\bigl(P'(z) + P(z)\mathfrak{G}'(z)\bigr) \equiv \sum_{l=0}^{h} A_{k_l\tau_l}(z) P^{k_l}(z) \exp C_{k_l}. \tag{12}$$

Предположим, что

$$\mathfrak{G}(z) \not\equiv B_{0j}(z) + C_0, \tag{13}$$

Тогда

$$B_{0j}(z) \equiv B_{\alpha\beta}(z) + \alpha\mathfrak{G}(z) + C_{j\alpha}, \ j = \overline{1, s_0}; \tag{14}$$

где $\alpha = \overline{\alpha_0, \alpha_{\rho_j}}$, $\beta = \overline{\beta_0, \beta_{\rho_j}}$, $\alpha_\xi \in \{1, 2, ..., n\}$, $\beta_\xi \in \{1, 2, ..., s_{\alpha_\xi}\}$, $\xi = \overline{0, \rho_j}$.

Из тождества (3) следует, что

$$A_{0j}(z) + \sum_{\xi=0}^{\rho_j} A_{\alpha_\xi\beta_\xi}(z) P^{\alpha_\xi}(z) \exp C_{j\alpha_\kappa} \equiv 0, \ j = \overline{1, s_0}. \tag{15}$$

Разделив тождество (12) на полином P, получим, что при (13) функция $\dfrac{DP'}{P}$ не должна иметь полюсов. Это возможно лишь в случае, когда нули полинома P совпадают с нулями полинома D. Пусть $\overset{*}{z}$ — один из таких нулей. Подставляя $\overset{*}{z}$ в тождество (15), получаем, что $A_{0j}(\overset{*}{z}) = 0$, $j = \overline{1, s_0}$.

Таким образом, справедливо

Свойство 3. *Для того чтобы целая функция* (2) *с конечным числом нулей при условии* (13) *являлась решением уравнения* (1), *необходимо, чтобы полиномы* $D,\ A_{0j},\ j=\overline{1,s_0}$, *имели общие нули, причём нулями решения* (2) *при* (13) *могут быть общие нули этих полиномов.*

Следствие 1. *Количество различных нулей целого решения* (2) *при условии* (13) *уравнения* (1) *не превышает количества различных общих нулей полиномов* $D,\ A_{0j},\ j=\overline{1,s_0}$.

Свойство 4. *Кратность* r *нуля* $\overset{*}{z}$ *целого решения* (2) *при условии* (13) *уравнения* (1) *не превышает числа* ζ, *равного* $\min\limits_{j=\overline{1,s_0}}\{r_j\}$, *где* r_j — *кратности нуля* $\overset{*}{z}$ *полиномов* A_{0j} *соответственно.*

Доказательство. Предположим противное: существует такое $l\in\{1,2,\ldots,s_0\}$, что $r_l>r$. Из тождеств (15) выделим тождество при $j=l$. В результате почленного деления этого тождества на $\bigl(z-\overset{*}{z}\bigr)^{r_l}$ и учитывая, что $r_l<r$, будем иметь

$$\frac{A_{0l}(z)}{\bigl(z-\overset{*}{z}\bigr)^{r_l}}\Bigg|_{z=\overset{*}{z}}=0,$$

что противоречит допущенному. ■

Из следствия 1 и свойства 4 заключаем, что имеет место

Свойство 5. *Степень* p *полинома* P *целого решения* (2) *при условии* (13) *уравнения* (1) *удовлетворяет неравенству*

$$p\leqslant \min_{j=\overline{1,s_0}}\bigl\{\deg A_{0j}\bigr\}.$$

Пусть имеет место представление (11) при $i=l,\ j=s$. Тогда функция (2) с конечным числом нулей при условии (13) является решением уравнения (1), когда имеют место тождества (4) или когда имеет место представление (11), где

$$\mathfrak{G}(z)=\frac{B_{ls}(z)+C_l}{1-l}\quad\text{при}\quad l\neq 1;$$

$$\mathfrak{G}(z) = \ln P(z) + \int \frac{A_{1s}(z)\exp b_{1s}}{D(z)}\, dz \quad \text{при} \quad l = 1.$$

Итак, для того чтобы функция (2) с конечным числом нулей при условии (13) и $l \neq 1$ была решением уравнения (1), необходимо чтобы это уравнение имело вид (9).

Если подставить целую функцию (2) с конечным числом нулей при условии (13) в уравнение (9), то получим тождества

$$D(z)\left(P'(z) + \frac{P(z)B'_{ls}(z)}{1-l}\right) \equiv \sum_{j=0}^{t_0} F_{0j}(z)P^{r_{oj}}(z),$$
$$\sum_{j=0}^{t_i} F_{ij}(z)P^{-r_{ij}}(z) \equiv 0,\ i = \overline{1,m}\,. \tag{16}$$

Стало быть, для того чтобы целая функция (2) с конечным числом нулей при условии (13) и $l = 1$ была решением уравнения (9), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись тождества (16). Просуммировав тождества (16) и учитывая связь полиномов F_{ij}, A_{ij}, получаем

Свойство 6. *Для того чтобы целая функция* (2) *с конечным числом нулей при условии* (13) *и* $l = 1$ *была решением уравнения* (1) *необходимо, чтобы полином* P *был решением алгебраического дифференциального уравнения*

$$D(z)u' = \sum_{i=0}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{s_i} A_{ij}(z)\exp C_{ij}\right) - \delta_i^1\,\frac{D(z)B'_{ls}(z)}{1-l}\right)u^i, \tag{17}$$

где δ_i^1 *— символ Кронекера.*

Пусть представление (11) имеет место при $i = 0,\ j = \tau,$ когда $\tau \in \{1, 2, \ldots, s_0\}$. Тогда тождества (14) и (15) имеют место при $\xi \neq \tau$. В этом случае задача сводится к нахождению решений вида

$$w\colon z \to P(z)\exp B_{0\tau}(z),\ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{18}$$

где P — полином с $\deg P(z) = p > 0$.

Аналогичными рассуждениями, как и при доказательстве свойств $3-6$, доказываем следующие предложения.

Для того чтобы целая функция (18) являлась решением уравнения (1), необходимо, чтобы полиномы $A_{0\xi},\ \xi = \overline{1, s_0}\,,\ \xi \neq \tau,$ имели общие нули, причём нулями решения (18) могут быть лишь общие нули этих полиномов.

Количество различных нулей целого решения (18) уравнения (1) не превышает количества различных общих нулей полиномов $A_{0\xi},\ j = \overline{1, s_0}\,,\ \xi \neq \tau.$

Кратность r нуля $\overset{*}{z}$ целого решения (18) уравнения (1) не превышает числа

$$\nu = \min\{r_j : j = \overline{1, s_0}\,, j \neq \tau\},$$

где r_j — кратности нуля $\overset{*}{z}$ полиномов A_{0j} соответственно.

Степень p полинома P целого решения (18) уравнения (1) удовлетворяет неравенству

$$p \leqslant \min\{\deg A_{0j} : j = \overline{1, s_0}\,, j \neq \tau\}.$$

Если $\overset{*}{z}$ является нулём целого решения (18) уравнения (1) и одновременно является нулём полинома D, то $\overset{*}{z}$ является нулём полинома $A_{0\tau}$, причём кратность нуля $\overset{*}{z}$ решения (18) не превышает кратности этого нуля полинома $A_{0\tau}$.

Действительно, поскольку $\overset{*}{z}$ является нулём полинома D и нулём решения (18), то после деления тождества (12) на полином P получаем, что $\dfrac{A_{0\tau}}{P}$ не должно иметь полюса в точке $\overset{*}{z}$.

Если $\overset{*}{z}$ является нулём целого решения (18) уравнения (1) и не является нулём полинома D, то $\dfrac{A_{0\tau}}{P}$ в точке $\overset{*}{z}$ должно иметь простой полюс.

Это следует из того, что после деления тождества (12) на полином P получаем, что $\dfrac{DP'}{P}$ в точке $\overset{*}{z}$ имеет простой полюс, так как $D(\overset{*}{z}) \neq 0$.

Условимся говорить, что число $\overset{*}{z}$ является нулём полинома $A_{0\tau}$ кратности нуль, если $A_{0\tau}\big(\overset{*}{z}\big) \neq 0.$

Справедливо утверждение.

Если $\overset{*}{z}$ является нулём целого решения (18) уравнения (1) и не является нулём полинома $D,$ то кратность этого нуля решения (18) на единицу больше кратности нуля $\overset{*}{z}$ полинома $A_{0\tau}.$

Для того чтобы целая функция (18) была решением уравнения (1), необходимо, чтобы это дифференциальное уравнение имело вид

$$D(z)w' = \sum_{i=0}^{m} \exp G_i(z)\Bigg(w^{r_{i0}} F_{i0}(z) + \\ + \exp(r_{i0} B_{0\tau}(z)) \sum_{j=1}^{t_i} F_{ij}(z) \exp\big(-r_{ij} B_{0\tau}(z)\big) w^{r_{ij}}\Bigg), \tag{19}$$

где $G_0 = B_{0\tau},\ r_{00} = 0,$

$$G_i \in \big\{B_{\lambda\eta} \colon \lambda = \overline{0, n},\ \eta = \overline{1, s_\lambda}\,\big\},$$

$$F_{ij} \in \big\{A_{\lambda\eta} \exp C_{\lambda\eta} \colon \lambda = \overline{0, n},\ \eta = \overline{1, s_\lambda}\,\big\},$$

при $i \neq k$ разность

$$G_i(z) - G_k(z) \not\equiv \mathrm{const},$$

для каждого $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ при $F_{k0} \not\equiv 0$ сумма

$$\sum_{j=1}^{t_k} |F_{kj}(z)| \not\equiv 0.$$

Для того чтобы целая функция (18) была решением уравнения (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись тождества

$$D(z)\big(P'(z)+P(z)B'_{0\tau}(z)\big)\equiv\sum_{j=0}^{t_0}F_{0j}(z)P^{r_{0j}}(z),$$
$$\sum_{j=0}^{t_i}F_{ij}(z)P^{r_{ij}}(z)\equiv 0,\ i=\overline{1,m}\,. \tag{20}$$

Для того чтобы целая функция (18) была решением уравнения (1), необходимо, чтобы полином P был решением алгебраического дифференциального уравнения

$$D(z)u'=\sum_{i=0}^{n}\left(\left(\sum_{j=1}^{s_i}A_{ij}(z)\exp C_{ij}\right)-\delta_i^1 D(z)B'_{0\tau}(z)\right)u^i, \tag{21}$$

где δ_i^1 — символ Кронекера.

Из уравнений (17) – (21), используя результаты исследований [24; 84; 87; 127; 135; 136; 157; 158; 180], могут быть установлены свойства полинома P в представлении (18), на основании которых можем судить о существовании P, о степени p, о количестве полиномов P с различными степенями.

В [76; 81; 130] предлагается метод построения полиномиальных решений уравнений типа (17) и (21) в целом. При рассмотрении тождеств (16) и (20) эти свойства аналогичными рассуждениями уточняются, что даёт достаточно полную информацию о целых решениях с конечным числом нулей (2) уравнения (1).

Рассмотрим нелинейное дифференцальное уравнение

$$D(z)w'=\sum_{i=0}^{n}\mathfrak{B}_i(z)w^i,\ n\geqslant 2, \tag{22}$$

где D — полином, $\mathfrak{B}_i, i=\overline{0,n},$ — целые функции, $\mathfrak{B}_n(z)\not\equiv 0$.

Пусть нам известно одно целое решение

$$w\colon z\to w_1(z),\ \forall z\in\mathbb{C}.$$

Заменой $w = w_1 + u$ уравнение (22) приводим к виду

$$D(z)u' = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i(z)u^i, \ n \geqslant 2, \tag{23}$$

где $\mathfrak{A}_i, i = \overline{1,n},$ — целые функции, $\mathfrak{A}_n(z) \equiv \mathfrak{B}_n(z) \not\equiv 0.$

Выполнив деление уравнения (23) на $u,$ получим, что частное $\dfrac{Du'}{u}$ не должно иметь полюсов. Это возможно лишь в случае, когда нули функции u совпадают с нулями полинома $D.$

Стало быть, имеет место

Свойство 7. *Любые два целых решения уравнения* (22) (*уравнения* (1)) *отличаются на целую функцию с конечным числом нулей или без нулей.*

Свойство 8. *Все целые решения с конечным числом нулей или без нулей уравнения* (22) (*уравнения* (1)) *имеют общую экспоненциальную часть.*

Доказательство. Пусть известно два целых решения уравнения (22) с конечным числом нулей или без нулей и различными экспоненциальными частями:

$$w_1 : z \to P_1(z) \exp Q_1(z), \ w_2 : z \to P_2(z) \exp Q_2(z), \ \forall z \in \mathbb{C},$$

где P_1 и P_2 — полиномы степеней $p_1 \geqslant 0$ и $p_2 \geqslant 0$ соответственно, Q_1 и Q_2 — целые функции и

$$Q_1(z) - Q_2(z) \not\equiv \text{const}.$$

Тогда согласно свойству 7 в формуле

$$w_2(z) = w_1(z) + R(z) \exp S(z), \ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{24}$$

полином R и целая функция S такие, что $Q_1(z) - S(z) \not\equiv \text{const}.$ В противном случае решения w_1 и w_2 имеют общую экспоненциальную часть.

Найдём количество нулей функции $w_2.$ Для этого согласно (24) необходимо найти корни уравнения

$$P_1(z)\exp\bigl(Q_1 - S(z)\bigr) = -R(z),$$

которое после введения параметра a запишем в виде

$$P_1(z)\exp\bigl(Q_1 - S(z)\bigr) = aR(z), \tag{25}$$

Согласно [103, с. 58] уравнение (25) имеет бесконечное множество решений, за возможным исключением одного значения a, где уравнение (25) может иметь конечное число решений, так как $R(z) \not\equiv 0$. Но таким исключительным значением является $a = 0$.

Стало быть, при $a = -1$ уравнение (25) имеет бесконечное число нулей. Полученное противоречие доказывает свойство 8. ■

Если учесть, что для уравнения (1) имеет место теорема 1, то справедливы следующие утверждения.

Свойство 9. *Если уравнение* (1) *имеет целое решение с конечным числом нулей, то любое его целое решение с бесконечным числом нулей является обобщённым квазиполиномом.*

Свойство 10. *Если уравнение* (1) *имеет целое решение без нулей или с конечным числом нулей, или в виде обобщённого квазиполинома, то все его целые решения являются обобщёнными квазиполиномами.*

Пусть в уравнение (22) у коэффициентов $\operatorname{ord}\mathfrak{B}_i(z) = \rho_i$. Если $\rho_i < +\infty$, то $\operatorname{typ}\mathfrak{B}_i(z) = \sigma_i$. В случае, когда

$$\mathfrak{B}_n\colon z \to \mathfrak{P}(z)\exp Q(z),\ \forall z \in \mathbb{C}, \tag{26}$$

где $\mathfrak{P}$ — полином, Q — целая функция, справедливо

Свойство 11. *Пусть выполняются условия:*

1) $\rho_{k_1} = \rho_{k_2} = \ldots = \rho_{k_s} = \rho,\ \rho > \rho_j,\ j = \overline{0,n},\ j \ne k_1,$ $j \ne k_2, \ldots, j \ne k_s;$

2) $\sigma_{k_{\tau_1}} = \sigma_{k_{\tau_2}} = \ldots = \sigma_{k_{\tau_\lambda}} = \sigma,\ \sigma > \sigma_{k_l},\ l = \overline{1,s},\ l \ne \tau_1,$ $l \ne \tau_2, \ldots, l \ne \tau_\lambda.$

Тогда уравнение (22) *с коэффициентом* (26) *может иметь целые решения* w *такие, что* $\operatorname{ord} w \leqslant \rho$, *причём, если* $\operatorname{ord} w = \rho$, *то* $\operatorname{typ} w \leqslant \sigma$.

Доказательство. Пусть w — целое трансцендентное решение уравнения (22) при (26) такое, что $\operatorname{ord} w > \rho$. Производная w' может быть выражена через саму функцию w и центральный индекс $\nu(r)$ в допустимых точках ξ таких, что $|w(\xi)| = M(r; w)$, где $M(r; w)$ — максимум модуля, по формуле [8, с. 211 − 212; 9, с. 25]

$$w'(\xi) = w(\xi)\Big(\frac{\nu(r)}{\xi}\Big)(1 + \varepsilon(\xi)), \tag{27}$$

где

$$|\varepsilon(\xi)| = O\bigg(\big(\nu(r)\big)^{\xi - \frac{1}{4}}\bigg),\ \ 0 < \xi < \frac{1}{4}.$$

Подставив (27) в уравнение (22) при (26) и выполнив почленное деление равенства на произведение

$$\mathfrak{P}(\xi) \exp Q(\xi) w^n(\xi) \Big(\frac{\nu(r)}{\xi}\Big)^n,$$

получим

$$\begin{gathered}\frac{D(\xi)\exp(-Q(\xi))\nu(r)(1+\varepsilon(\xi))}{\xi\mathfrak{P}(\xi)w^{n-1}(\xi)} = \\ = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\mathfrak{B}_i(\xi)\exp(-Q(\xi))}{\mathfrak{P}(\xi)w^{n-i}(\xi)}\,,\end{gathered} \tag{28}$$

где $|\varepsilon(\xi_k)| \to 0$ для последовательности допустимых ξ_k таких, что $|\xi_k| \to +\infty$. Так как $\operatorname{ord} w > \rho$, т.е. $\operatorname{ord} w > \rho_i$, $i = \overline{0, n}$, то [92, с. 8 − 10] всегда можно указать последовательность ξ_k такую, что при $|\xi_k| \to +\infty$

$$\frac{D(\xi_k)\exp(-Q(\xi_k))\nu(r)}{\xi_k\mathfrak{P}(\xi_k)w^{n-1}(\xi_k)} \to 0, \tag{29}$$

$$\frac{\mathfrak{B}_i(\xi_k)\exp(-Q(\xi_k))}{\mathfrak{P}(\xi_k)w^{n-i}(\xi_k)} \to 0,\ i=\overline{0,n-1}\,. \tag{30}$$

Переходя в (28) к пределу при $|\xi_k| \to +\infty,$ на основании (29) и (30) получаем противоречие, которое может быть устранено при $\operatorname{ord} w \leqslant \rho.$

Если $\operatorname{ord} w = \rho < +\infty,$ то в (28) последнюю сумму разобъём на две:

$$\sum_{\substack{j=0,\\ j\ne k_r}}^{n-1} \mathfrak{C}_j(\xi) + \sum_{\substack{r=1,\\ k_r\ne n}}^{s} \mathfrak{C}_{k_r}(\xi).$$

Предположим, что $\operatorname{typ} w > \sigma.$ Тогда при всех $i=\overline{0,n-1}$ существует последовательность допустимых значений ξ_m таких, что при $|\xi_m| \to +\infty$

$$\mathfrak{C}_j(\xi_m) \to 0,\ j=\overline{0,n-1}\,,\ j\ne k_r, \tag{31}$$

$$\mathfrak{C}_{k_r}(\xi_m) \to 0,\ r=\overline{1,s}\,,\ k_r\ne n. \tag{32}$$

На основании предельного перехода в (28) при $|\xi_m| \to +\infty$ с учётом (29), (31) и (32) получаем противоречие, которое и доказывает данное свойство. ■

Глава VI

ЦЕЛЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим систему n алгебраических дифференциальных уравнений

$$\sum_{i=0}^{N_j} A_{ij} \prod_{k=1}^{M_{ij}} \prod_{\tau=1}^{n} \Bigl(w_\tau^{l_{\tau kij}}\Bigr)^{\nu_{\tau kij}} = 0,\ j = \overline{1,n}\,, \tag{1}$$

где $l_{\tau kij}$ и $\nu_{\tau kij}$ — целые неотрицательные числа, а A_{ij} — полиномы со следующим лексикографическим расположением членов

$$A_{ij}\colon z \to a_{ij} z^{\alpha_{ij}} + \ldots\,,\ \forall z \in \mathbb{C},\ a_{ij} \neq 0,$$

решения которой будем находить в виде

$$w_\tau\colon z \to w_\tau(z),\ \forall z \in \mathbb{C},\ \tau = \overline{1,n}\,, \tag{2}$$

где w_τ — целые функции.

Числами

$$\varkappa_{\tau ij} = \sum_{k=1}^{M_{ij}} \nu_{\tau kij},\ \ \mathfrak{m}_{\tau ij} = \sum_{k=1}^{M_{ij}} l_{\tau kij} \nu_{\tau kij},$$

$$\mathfrak{l}_{\tau ij} = \max\bigl\{l_{\tau kij} : k = \overline{1, M_{ij}}\,\bigr\}$$

обозначим соответственно *размерность, относительный вес, порядок* i-го члена j-го дифференциального уравнения по переменной w_τ, а числами

$$\mathfrak{m}_{ij} = \sum_{\tau=1}^{n} \mathfrak{m}_{\tau ij}, \quad \mathfrak{n}_{ij} = a_{ij} - \mathfrak{m}_{ij}$$

обозначим *относительный вес* и *абсолютный вес* i-го члена j-го уравнения.

Будем считать, что полиномиальные составляющие целых решений (2) имеют степени

$$m_\tau \geqslant \left\{ \mathfrak{l}_{\tau ij} \colon i = \overline{0, N_j}\,, \, j = \overline{1, n} \right\}, \ \tau = \overline{1, n}\,.$$

Такой подход не нарушает общности рассуждений, поскольку решения (2), у которых полиномиальные составляющие имеют степени

$$m_\tau < \left\{ \mathfrak{l}_{\tau ij} \colon i = \overline{0, N_j}\,, \, j = \overline{1, n} \right\}, \ \tau = \overline{1, n}\,,$$

можно найти на основании разработанного метода, но уже применённого к «укороченной системе» (1), полученной отбрасыванием тех членов уравненний системы (1), которые заведомо обращаются в нуль.

§ 1. Полиномиальные решения систем алгебраических дифференциальных уравнений

Для системы (1.0.0) рассмотрим решения (2.0.0), когда составляющие являются полиномами

$$w_\tau \colon z \to c_{m_\tau} z^{m_\tau} + \ldots\,, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ c_{m_\tau} \neq 0, \ \tau = \overline{1, n}\,, \ m_\tau \geqslant \mathfrak{l}_\tau.$$

В основу рассуждений положена асимптотическая формула (1.1.2.1) выражения производной полинома.

Для удобства дальнейших рассуждений введём обозначения:

$$S_{ij}(m_\tau) = \sum_{\tau=1}^{n} \varkappa_{\tau ij} m_\tau - \mathfrak{m}_{ij};$$

$$K_{ij}(m_\tau) = (-1)^{\mathfrak{m}_{ij}} \prod_{k=1}^{M_{ij}} \prod_{\tau=1}^{n} \Bigl((-m_\tau)_{l_{\tau kij}}\Bigr)^{\nu_{\tau kij}}, \ m_\tau > \mathfrak{l}_\tau, \ \tau = \overline{1,n}\,.$$

Теорема 1. *Пусть для j-го уравнения системы* (1.0.0) *выполняются условия:*

$$\varkappa_{r\theta j} = \varkappa_{rpj} = \ldots = \varkappa_{rp+\lambda_r j} > \varkappa_{r f_r j},$$
$$r \in \{1, \ldots, n\}, \ 0 \leqslant p \leqslant N_j, \ \theta = \overline{0, p-1}\,, \ f_r = \overline{p + \lambda_r + 1, N_j}\,, \tag{1}$$

$$\varkappa_{\tau pj} = \ldots = \varkappa_{\tau p+\lambda_\tau j}, \ 0 \leqslant \lambda_\tau \leqslant \lambda_r, \ \tau = \overline{1,n}\,, \ \tau \ne r; \tag{2}$$

$$\mathfrak{n}_{pj} > \mathfrak{n}_{lj}, \ l = \overline{p+1, p+\lambda}\,, \ \lambda = \min\{\lambda_\tau : \tau = \overline{1,n}\,\}.$$

Тогда относительно существования полиномиальных решений (2.0.0) *справедливы следующие утверждения:*

1) *при $p = 0, \ \lambda = N_j$ решений нет;*

2) *при $p = 0, \ \lambda < N_j$ степени m_τ такие, что выполняется хотя бы одно из неравенств*

$$\sum_{\tau=1}^{n} (\varkappa_{\tau\eta j} - \varkappa_{\tau pj}) m_\tau \geqslant \mathfrak{n}_{pj} - \mathfrak{n}_{\eta j}, \ \eta = \overline{\lambda + 1, N_j}\,; \tag{3}$$

3) *при $0 < p \leqslant N_j, \ \lambda = N_j - p$ степени m_τ такие, что выполняется хотя бы одно из неравенств*

$$\sum_{\tau=1}^{n} (\varkappa_{\tau\theta j} - \varkappa_{\tau pj}) m_\tau \geqslant \mathfrak{n}_{pj} - \mathfrak{n}_{\theta j}, \ \theta = \overline{0, p-1}\,; \tag{4}$$

4) *при $0 < p < N_j, \ \lambda < N_j - p$ степени m_τ, при которых выполняются неравенства*

$$\sum_{\tau=1}^{n} (\varkappa_{\tau\eta j} - \varkappa_{\tau pj}) m_\tau < \mathfrak{n}_{pj} - \mathfrak{n}_{\eta j}, \ \eta = \overline{p + \lambda + 1, N_j}\,, \tag{5}$$

такие, что выполняется хотя бы одно из неравенств (4);

5) *при* $0 < p < N_j$, $\lambda < N_j - p$ *степени* m_τ, *при которых выполняются неравенства*

$$\sum_{\tau=1}^{n} (\varkappa_{\tau\theta j} - \varkappa_{\tau p j}) m_\tau < \mathfrak{n}_{pj} - \mathfrak{n}_{\theta j}, \ \theta = \overline{0, p-1}, \tag{6}$$

такие, что выполняется хотя бы одно из неравенств (3) *при* $\eta = \overline{p+1+\lambda, N_j}$.

Доказательство. Основываясь на асимптотической формуле (1.1.2.1) устанавливаем, что система полиномов (2.0.0) является решением системы (1.0.0) тогда и только тогда, когда

$$\sum_{i=0}^{N_j} K_{ij}(m_\tau) A_{ij}(z)(1 + \varepsilon_{ij}(z)) z^{S_{ij}(m_\tau)} = 0, \ \forall z \in \mathbb{C}, \ j = \overline{1, n}, \tag{7}$$

где $\varepsilon_{ij}(z) \to 0$ при $z \to \infty$.

С учётом условий теоремы j-е тождество системы (7), выполнив почленное деление на полином

$$K_{pj}(m_\tau) A_{pj}(z) z^{S_{pj}(m_\tau)},$$

запишем в виде

$$\sum_{\theta=0}^{p-1} \frac{K_{\theta j}(m_\tau) A_{\theta j}(z)}{K_{pj}(m_\tau) A_{pj}(z)} \bigl(1 + \varepsilon_{\theta j}(z)\bigr) z^{S_{\theta j}(m_\tau) - S_{pj}(m_\tau)} +$$

$$+ \varepsilon_{pj}(z) + 1 + \sum_{l=p+1}^{p+\lambda} \frac{K_{lj}(m_\tau) A_{lj}(z)}{K_{pj}(m_\tau) A_{pj}(z)} \bigl(1 + \varepsilon_{lj}(z)\bigr) z^{\mathfrak{m}_{pj} - \mathfrak{m}_{lj}} +$$

$$+ \sum_{\eta=p+\lambda+1}^{N_j} \frac{K_{\eta j}(m_\tau) A_{\eta j}(z)}{K_{pj}(m_\tau) A_{pj}(z)} \bigl(1 + \varepsilon_{\eta j}(z)\bigr) z^{S_{\eta j}(m_\tau) - S_{pj}(m_\tau)} \equiv 0,$$

где $\varepsilon_{ij}(z) \to 0$ при $z \to \infty$.

Так как $\mathfrak{n}_{pj} > \mathfrak{n}_{lj}$ для всех $l = \overline{p+1, p+\lambda}$, то

$$\frac{A_{lj}(z)}{A_{pj}(z)}\, z^{\mathfrak{m}_{pj} - \mathfrak{m}_{lj}} \to 0 \quad \text{при } z \to \infty. \tag{9}$$

Если для всех $\theta = \overline{0, p-1}$ выполняются неравенства (6), то

$$\frac{A_{\theta j}(z)}{A_{pj}(z)}\, z^{S_{\theta j}(m_\tau) - S_{pj}(m_\tau)} \to 0 \quad \text{при } z \to \infty. \tag{10}$$

Если для всех $\eta = \overline{p+\lambda+1, N_j}$ выполняются неравенства (5), то при при $z \to \infty$

$$\frac{A_{\eta j}(z)}{A_{pj}(z)}\, z^{S_{\eta j}(m_\tau) - S_{pj}(m_\tau)} \to 0. \tag{11}$$

Пусть $p = 0,\ \lambda = N_j$. Переходя в (8) к пределу при $z \to \infty$, на основании (9) получим противоречие, которое и доказывает утверждение 1).

Пусть $p = 0,\ \lambda < N_j$. Переходя в (8) к пределу при $z \to \infty$, с учётом (11) при $\lambda = 0$, а в случае $\lambda > 0$ на основании (9) и (11), получим противоречие, которое и доказывает утверждение 2).

Пусть $0 < p < N_j,\ \lambda = N_j - p$. Переходя в (8) к пределу при $z \to \infty$, с учётом (10) при $\lambda = 0$, а в случае $\lambda > 0$ на основании (9) и (10), получим противоречие, которое и доказывает утверждение 3).

Пусть $0 < p < N_j,\ \lambda < N_j - p$ и выполняются неравенства (5) (неравенства (6)). Переходя в (8) к пределу при $z \to \infty$, с учётом (10) и (11) при $\lambda = 0$, а в случае $\lambda > 0$ на основании (9) – (11), получим противоречие, которое и доказывает утверждение 4) (утверждение 5)). ■

Теорема 2. *Пусть для* j*-го уравнения системы* (1.0.0) *выполняются условия* (1), (2) *и*

$$\mathfrak{n}_{pj} = \ldots \mathfrak{n}_{p+sj} > \mathfrak{n}_{gj},$$

$$0 < s < \lambda, \ g = \overline{p+s+1, p+\lambda}\,, \ \lambda = \min\{\lambda_\tau : \tau = \overline{1,n}\,\}.$$

Тогда относительно существования полиномиальных решений (2.0.0) *справедливы следующие утверждения:*

1) *при* $p = 0$, $\lambda = N_j$ *степени* m_τ *такие, что*

$$\sum_{\xi=p}^{p+s} a_{\xi j} K_{\xi j}(m_\tau) = 0; \tag{12}$$

2) *при* $p = 0$, $\lambda < N_j$ *степени* m_τ *такие, что выполняются неравенства* (5)*, удовлетворяют равенству* (12)*;*

3) *при* $0 < p \leqslant N_j$, $\lambda = N_j - p$ *степени* m_τ *такие, что выполняются неравенства* (6)*, удовлетворяют равенству* (12)*;*

4) *при* $0 < p < N_j$, $\lambda < N_j - p$ *степени* m_τ *такие, что выполняются неравенства* (5) *и* (6)*, удовлетворяют равенству* (12).

Доказательство. Учитывая условия, накладываемые на члены j-го уравнения системы (1.0.0) данной теоремой, рассуждениями, аналогичными как и при доказательстве теоремы 1, приходим к тождеству, для членов которого с номерами $\xi = \overline{p+1, p+s}$ и $g = \overline{p+s+1, p+\lambda}$ имеем:

$$\frac{A_{\xi j}(z)}{A_{pj}(z)}\, z^{\mathfrak{m}_{pj} - \mathfrak{m}_{\xi j}} \to \frac{a_{\xi j}}{a_{pj}(z)}\,, \quad \text{при } z \to \infty; \tag{13}$$

$$\frac{A_{gj}(z)}{A_{pj}(z)}\, z^{\mathfrak{m}_{pj} - \mathfrak{m}_{gj}} \to 0, \quad \text{при } z \to \infty. \tag{14}$$

Если для членов тождества с номерами $\theta = \overline{0, p-1}$ и $\eta = \overline{p+\lambda+1, N_j}$ выполняются неравенства (5) и (6) соответственно, то справедливы соотношения (10) и (11).

Пусть $p = 0$, $\lambda = N_j$. Переходя в (8) к пределу при $z \to \infty$, с учётом (13) при $s = \lambda$, а при $1 \leqslant s < \lambda$ на основании (13) и (14) приходим к равенству (12), что и доказывает утверждение 1).

Утверждения 2) − 4) доказываются аналогичным образом. ■

§ 2. Целые трансцендентные решения систем алгебраических дифференциалых уравнений

Для целой трансцендентной функции w_τ производная $w_\tau^{(l)}$ выражается через саму функцию w_τ и её центральный индекс $\nu_\tau r^\tau$ в допустмых точках ξ_τ таких, что $|w_\tau(\xi_\tau)| = M(r_\tau; w_\tau)$, где $M(r_\tau; w_\tau)$ — максимум модуля функции w_τ, по формуле

$$w_\tau^{(l)}(\xi_\tau) = w_\tau(\xi_\tau)\left(\frac{\nu_\tau(r_\tau, w_\tau)}{\xi_\tau}\right)^l \big(1 + \varepsilon_{\tau l}(\xi_\tau)\big),$$

где

$$\big|\varepsilon_{\tau l}(\xi_\tau)\big| = o\Big(\big(\nu_\tau(r_\tau, w_\tau)\big)^{\delta_\tau - \frac{1}{4}}\Big) \quad \text{при} \quad \xi_\tau \to \infty,$$

$$\tau = \overline{1,n}\,,\ l \in \mathbb{N},\ \varepsilon_{\tau_0}(\xi_\tau) \equiv 0,\ 0 < \delta_\tau < \frac{1}{4}\,.$$

Если существуют допустимые точки ξ, общие для всех функций $w_\tau, \tau = \overline{1,n}$, то будем говорить, что система функций w_τ, $\tau = \overline{1,n}$, является системой класса $\mathfrak{A}$.

Для системы класса $\mathfrak{A}$ справедливо, что $\bigcap\limits_{\tau=1}^{n} \xi_\tau \supset \xi$ и для каждой функции w_τ, $\tau = \overline{1,n}$, имеет место представление

$$w_\tau^{(l)}(\xi) = w_\tau(\xi)\left(\frac{\nu_\tau(r_\tau, w_\tau)}{\xi}\right)^l \big(1 + \varepsilon_{\tau l}(\xi)\big), \tag{1}$$

где

$$\big|\varepsilon_{\tau l}(\xi)\big| = o\Big(\big(\nu_\tau(r_\tau, w_\tau)\big)^{\delta_\tau - \frac{1}{4}}\Big) \quad \text{при} \quad \xi \to \infty,$$

$$\tau = \overline{1,n}\,,\ l \in \mathbb{N},\ \varepsilon_{\tau 0}(\xi) \equiv 0,\ 0 < \delta_\tau < \frac{1}{4}\,.$$

Систему целых функций $w_\tau, \tau = \overline{1,n}\,,$ будем называть системой класса $\mathfrak{A}_s$, $1 \leqslant s \leqslant n$, если $w_k, k = \overline{1,s}\,,$ — целые трансцендентные функции класса $\mathfrak{A}$, а $w_k, k = \overline{s+1,n}\,,$ — полиномы.

Теорема 1. *Пусть для* j*-го уравнения системы* (1.0.0) *выполняются условия:*

$$\begin{gathered}\varkappa_{t_\sigma 0j} = \ldots = \varkappa_{t_\sigma p_\sigma j},\ \varkappa_{t_\sigma 0j} > \varkappa_{t_\sigma f_\sigma j},\\ 0 \leqslant p_\sigma \leqslant p_{\sigma-1},\ f_\sigma = \overline{p_\sigma+1, p_{\sigma-1}}\,,\ p_0 = N_j,\ \sigma = \overline{1,s}\,;\end{gathered} \tag{2}$$

$$\varkappa_{t_\sigma 0j} \geqslant \varkappa_{t_\sigma \eta_\sigma j},\ \eta_\sigma = \overline{p_{\sigma-1}+1, N_j}\,,\ \sigma = \overline{1,s}\,; \tag{3}$$

$$\varkappa_{t_\delta 0j} = \ldots = \varkappa_{t_\delta p_\delta j},\ 0 \leqslant p_\delta \leqslant p_{\delta-1} \leqslant p_s,\ \delta = \overline{s+1,n}\,;$$

$$\mathfrak{m}_{t_\sigma 0j} = \ldots = \mathfrak{m}_{t_\sigma \lambda_\sigma j},\ 0 \leqslant \lambda_\sigma \leqslant \lambda_{\sigma-1},\ \lambda_0 = p_n,\ \sigma = \overline{1,s}\,;$$

$$\mathfrak{n}_{0j} > \mathfrak{n}_{lj},\ l = \overline{1,\lambda_s}\,.$$

Тогда система (1.0.0) *имеет целые решения* (2.0.0) *класса* $\mathfrak{A}_s$, *где* $w_{t_\sigma}, t_\sigma \in \{1,\ldots,n\}, \sigma = \overline{1,s}\,,$ — *целые трансцендентные функции, а* $w_{t_\delta}, t_\delta \in \{1,\ldots,n\}, \delta = \overline{s+1,n}\,,$ *суть полиномы,* $1 \leqslant s \leqslant n$, *такие, что* $\operatorname{ord} w_{t_\sigma}(z) = p_{t_\sigma}$ *и* $\deg w_{t_\delta}(z) = m_{t_\delta}$ *удовлетворяют хотя бы одному из неравенств*

$$\sum_{\sigma=1}^{s}\bigl(\mathfrak{m}_{t_\sigma qj} - \mathfrak{m}_{t_\sigma 0j}\bigr)p_{t_\sigma} + \sum_{\delta=s+1}^{n}\bigl(\varkappa_{t_\delta qj} - \varkappa_{t_\delta 0j}\bigr)m_{t_\delta} \geqslant$$

$$\geqslant \mathfrak{n}_{0j} - \mathfrak{n}_{qj},\ q = \overline{\lambda_s+1, p_s}\,.$$

Доказательство. Пусть система (1.0.0) имеет решение (2.0.0), где w_{t_σ}, $t_\sigma \in \{1,\ldots,n\}$, $\sigma = \overline{1,s}$, $1 \leqslant s \leqslant n$, суть целые трансцендентные функции класс $\mathfrak{A}$, а w_{t_δ}, $t_\delta \in \{1,\ldots,n\}$, $\delta = \overline{s+1,n}$, $1 \leqslant s \leqslant n$, — полиномы, $\deg w_{t_\delta}(z) = m_{t_\delta}$.

Тогда имеет место система тождеств

$$\sum_{i=0}^{N_j} \mathfrak{L}_{ij}(m_{t_\delta}) A_{ij}(\xi) \prod_{\sigma=1}^{s} \bigl(w_{t_\sigma}(\xi)\bigr)^{\varkappa_{t_\sigma ij}} \bigl(\nu_{t_\sigma}(r, w_{t_\sigma})\bigr)^{\mathfrak{m}_{t_\sigma ij}} \cdot$$
$$\cdot \prod_{\delta=s+1}^{n} \bigl(w_{t_\delta}(\xi)\bigr)^{\varkappa_{t_\delta ij}} \xi^{-\mathfrak{m}_{ij}} \bigl(1+\varepsilon_{ij}(\xi)\bigr) \equiv 0,\ j=\overline{1,n}\,, \tag{4}$$

где

$$\mathfrak{L}_{ij}(m_{t_\delta}) = \prod_{k=1}^{M_{ij}} \prod_{\delta=s+1}^{n} \Bigl((-1)^{l_{t_\delta kij}} (-m_{t_\delta})_{l_{t_\delta kij}}\Bigr)^{\nu_{t_\delta kij}},$$

составленных с учётом асимптотических формул (1.1.2.1) и (1).

У системы (4) j-е тождество с помощью элементарных преобразований приводим к виду

$$1+\varepsilon_{0j}(\xi) + \sum_{l=1}^{\lambda_s} \frac{\mathfrak{L}_{lj}(m_{t_\delta}) A_{ij}(\xi)}{\mathfrak{L}_{0j}(m_{t_\delta}) A_{0j}(\xi)}\, \xi^{\mathfrak{m}_{0j}-\mathfrak{m}_{lj}} \bigl(1+\varepsilon_{lj}(\xi)\bigr) +$$
$$+ \sum_{q=\lambda_s+1}^{p_s} \frac{\mathfrak{L}_{qj}(m_{t_\delta}) A_{qj}(\xi)}{\mathfrak{L}_{0j}(m_{t_\delta}) A_{0j}(\xi)} \prod_{\delta=s+1}^{n} \bigl(w_{t_\delta}(\xi)\bigr)^{\varkappa_{t_\delta qj}-\varkappa_{t_\delta 0j}} \cdot$$
$$\cdot \prod_{\sigma=1}^{s} \bigl(\nu_{t_\sigma}(r, w_{t_\sigma})\bigr)^{\mathfrak{m}_{t_\sigma qj}-\mathfrak{m}_{t_\sigma 0j}} \xi^{\mathfrak{m}_{0j}-\mathfrak{m}_{qj}} \bigl(1+\varepsilon_{qj}(\xi)\bigr) +$$

$$+\sum_{f_s=p_s+1}^{p_s-1}\frac{\mathfrak{L}_{f_sj}(m_{t_\delta})A_{f_sj}(\xi)}{\mathfrak{L}_{0j}(m_{t_\delta})A_{0j}(\xi)}\,(w_{t_s}(\xi))^{\varkappa_{t_sf_sj}-\varkappa_{t_s0j}}\cdot$$

$$\cdot\prod_{\delta=s+1}^{n}(w_{t_\delta}(\xi))^{\varkappa_{t_\delta f_sj}-\varkappa_{t_\delta 0j}}\prod_{\sigma=1}^{s}(\nu_{t_\sigma}(r,w_{t_\sigma}))^{\mathfrak{m}_{t_\sigma f_sj}-\mathfrak{m}_{t_\sigma 0j}}\cdot \tag{5}$$

$$\cdot\xi^{\mathfrak{m}_{0j}-\mathfrak{m}_{f_sj}}\,(1+\varepsilon_{f_sj}(\xi))+\ldots+$$

$$+\sum_{f_1=p_1+1}^{N_j}\frac{\mathfrak{L}_{f_1j}(m_{t_\delta})A_{f_1j}(\xi)}{\mathfrak{L}_{0j}(m_{t_\delta})A_{0j}(\xi)}\prod_{\sigma=1}^{s}(w_{t_\sigma}(\xi))^{\varkappa_{t_\sigma f_1j}-\varkappa_{t_\sigma 0j}}\cdot$$

$$\cdot(\nu_{t_\sigma}(r,w_{t_\sigma}))^{\mathfrak{m}_{t_\sigma f_1j}-\mathfrak{m}_{t_\sigma 0j}}\prod_{\delta=s+1}^{n}(w_{t_\delta}(\xi))^{\varkappa_{t_\delta f_1j}-\varkappa_{t_\delta 0j}}\cdot$$

$$\cdot\xi^{\mathfrak{m}_{0j}-\mathfrak{m}_{f_1j}}\,(1+\varepsilon_{f_1j}(\xi))\equiv 0.$$

Поскольку $\mathfrak{n}_{0j}>\mathfrak{n}_{lj}$, $l=\overline{1,\lambda_s}$, то

$$\frac{A_{lj}(\xi_k)}{A_{0j}(\xi_k)}\,|\xi_k|^{\mathfrak{m}_{0j}-\mathfrak{m}_{lj}}\to 0\quad\text{при}\quad|\xi_k|\to\infty. \tag{6}$$

Из того, что

$$\varkappa_{t_\sigma f_\sigma j}<\varkappa_{t_\sigma 0j},\ f_\sigma=\overline{p_\sigma+1,p_{\sigma-1}},\ p_0=N_j,\ \sigma=\overline{1,s},$$

и

$$\varkappa_{t_hf_\sigma j}\leqslant\varkappa_{t_h0j},\ h=\overline{\sigma+1,s},$$

по следствию из теоремы Лиувилля при $|\xi_k|\to\infty$

$$\frac{A_{f_\sigma j}(\xi_k)}{A_{0j}(\xi_k)} \prod_{d=\sigma}^{s} (w_{t_d}(\xi_k))^{\varkappa_{t_d f_d j} - \varkappa_{t_d 0j}} \prod_{\delta=s+1}^{n} (w_{t_\delta}(\xi_k))^{\varkappa_{t_\delta f_\delta j} - \varkappa_{t_\delta 0j}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{d=1}^{s} (\nu_{t_d}(r, w_{t_d}))^{\mathfrak{m}_{t_d f_d j} - \mathfrak{m}_{t_d 0j}} |\xi_k|^{\mathfrak{m}_{0j} - \mathfrak{m}_{f_d j}} \to 0,\ \sigma = \overline{1, s}\,. \tag{7}$$

На основании того, что центральный индекс целой трансцендентной функции w_{t_σ} с $\operatorname{ord} w_{t_\sigma}(z) = p_{t_\sigma}$ удовлетворяет асимптотическому равенству $\nu_{t_d}(r, w_{t_d}) \sim \alpha_\sigma r^{p_{t_\sigma}}$, заключаем, что

$$\frac{A_{qj}(\xi_k)}{A_{0j}(\xi_k)} \prod_{\sigma=1}^{s} (\nu_{t_d}(r, w_{t_d}))^{\mathfrak{m}_{t_\sigma qj} - \mathfrak{m}_{t_\sigma 0j}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\sigma=s+1}^{n} (w_{t_d}(\xi_k))^{\varkappa_{t_\sigma qj} - \varkappa_{t_\sigma 0j}} |\xi_k|^{\mathfrak{m}_{0j} - \mathfrak{m}_{qj}} \sim \tag{8}$$

$$\sim \frac{a_{qj}(\xi_k)}{a_{0j}(\xi_k)} \prod_{\sigma=1}^{s} (a_\sigma)^{\mathfrak{m}_{t_\sigma qj} - \mathfrak{m}_{t_\sigma 0j}} \prod_{\sigma=s+1}^{n} (c_{m_\delta})^{\varkappa_{t_\delta qj} - \varkappa_{t_\delta 0j}} |\xi_k|^{\mathfrak{S}_q} \to 0$$

при $|\xi_k| \to +\infty$, если только $\mathfrak{S}_q < 0$, $q = \overline{\alpha_s + 1, p_s}$, где

$$\mathfrak{S}_q = \sum_{\sigma=1}^{s} (\mathfrak{m}_{t_\sigma qj} - \mathfrak{m}_{t_\sigma 0j}) p_{t_\sigma} + \sum_{\delta=s+1}^{n} (\varkappa_{t_\delta qj} - \varkappa_{t_\delta 0j}) m_{t_\delta} - \mathfrak{n}_{0j} + \mathfrak{n}_{qj}.$$

Переходя в тождестве (5) к пределу при $|\xi_k| \to +\infty$, на основании (6) – (8) получаем противоречие, которое и доказывает утверждение теоремы. ■

Теорема 2. *Пусть для j-го уравнения системы* (1.0.0) *выполняются условия* (2), (3) *и*

$$\varkappa_{t_\delta 0j} = \ldots = \varkappa_{t_\delta p_\delta j}\,,\ \varkappa_{t_\delta 0j} > \varkappa_{t_\delta f_\delta j}\,,$$
$$0 \leqslant p_\delta \leqslant p_{\delta-1} \leqslant p_s\,,\ f_\delta = \overline{p_\delta + 1, p_{\delta-1}}\,,\ \delta = \overline{s+1, n}\,, \tag{9}$$

$$\varkappa_{t_\delta 0j} \geqslant \varkappa_{t_\delta \eta_\delta j}\,,\ \eta_\delta = \overline{p_{\delta-1}+1, p_{\overline{s}}}\,,\ \delta = \overline{s+1, n}\,, \tag{10}$$

$$\mathfrak{m}_{t_\sigma 0j} = \ldots = \mathfrak{m}_{t_\sigma \lambda_\sigma j}\,,\ \mathfrak{m}_{t_\sigma 0j} > \mathfrak{m}_{t_\sigma \theta_\sigma j}\,,$$
$$0 \leqslant \lambda_\sigma \leqslant \lambda_{\sigma-1},\ \theta_\sigma = \overline{\lambda_\sigma + 1, \lambda_{\sigma-1}}\,,\ \lambda_0 = p_n\,,\ \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{11}$$

$$\mathfrak{m}_{t_\sigma 0j} \geqslant \mathfrak{m}_{t_\sigma g_\sigma j}\,,\ g_\sigma = \overline{\lambda_{\sigma-1}+1, p_s}\,,\ \sigma = \overline{1, s}\,, \tag{12}$$

$$\mathfrak{n}_{0j} > \mathfrak{n}_{lj}\,,\ l = \overline{1, \lambda_s}\,, \tag{13}$$

$$\mathfrak{n}_{0j} \geqslant \mathfrak{n}_{qj}\,,\ q = \overline{\lambda_s + 1, p_s}\,. \tag{14}$$

Тогда система (1.0.0) *не имеет целых решений* (2.0.0) *класса* $\mathfrak{A}_s$, *где* $w_{t_\sigma}, t_\sigma \in \{1, \ldots, n\}, \sigma = \overline{1, s}\,, 1 \leqslant s \leqslant n$, *есть целые трансцендентные функции, а* $w_{t_\delta}, t_\delta \in \{1, \ldots, n\}$, $\delta = \overline{s+1, n}\,, 1 \leqslant s \leqslant n$, *— полиномы.*

Доказательство. Пусть система (1.0.0) имеет решение, у которого составляющие $w_{t_\sigma}, t_\sigma \in \{1, ..., n\}$, $\sigma = \overline{1, s}\,, 1 \leqslant s \leqslant n$, — целые трансцендентные функции класса $\mathfrak{A}$, а $w_{t_\delta}, t_\delta \in \{1, ..., n\}$, $\delta = \overline{s+1, n}\,, 1 \leqslant s \leqslant n$, — полиномы.

Рассуждениями, аналогичными, как и при доказательстве теоремы 1, с учётом асимптотических формул (1.1.2.1) и (1) приходим к тождеству (5) системы (4), но составленному уже с учётом (2), (3), (9) – (14).

Так как для всех $\theta_\sigma = \overline{\lambda_\sigma + 1, \lambda_{\sigma-1}}$, $\lambda_0 = p_n$, $\sigma = \overline{1, s}$, относительные веса $\mathfrak{m}_{t_\sigma 0j} > \mathfrak{m}_{t_\sigma \theta_\sigma j}$ и $\mathfrak{m}_{t_h 0j} \geqslant \mathfrak{m}_{t_h \theta_\sigma j}$, $h = \overline{\sigma + 1, s}$, $\mathfrak{n}_{0j} \geqslant \mathfrak{n}_{\theta_\sigma j}$, то при $|\xi_k| \to +\infty$

$$\frac{A_{\theta_\sigma j}(\xi_k)}{A_{0j}(\xi_k)} \prod_{d=\sigma}^{s} \left(\nu_{t_d}(r, w_{t_d})\right)^{\mathfrak{m}_{t_d\theta_d j} - \mathfrak{m}_{t_d 0j}} \left|\xi_k\right|^{\mathfrak{m}_{0j} - \mathfrak{m}_{\theta_d j}} \to 0. \qquad (15)$$

Поскольку для всех $f_\delta = \overline{p_\delta + 1, p_{\delta-1}}$, $\delta = \overline{s+1, n}$ размерности $\varkappa_{t_\delta 0j} > \varkappa_{t_\delta f_\delta j}$, $\varkappa_{t_r 0j} \geqslant \varkappa_{t_r f_\delta j}$, $r = \overline{\delta + 1, n}$, а относительные веса $\mathfrak{m}_{t_\sigma 0j} \geqslant \mathfrak{m}_{t_\sigma f_\sigma j}$, $\sigma = \overline{1, s}$, $\mathfrak{n}_{0j} \geqslant \mathfrak{n}_{f_\delta j}$, то при $\left|\xi_k\right| \to +\infty$

$$\frac{A_{f_\delta j}(\xi_k)}{A_{0j}(\xi_k)} \prod_{d=\delta}^{s} \left(w_{t_d}(\xi_k)\right)^{\varkappa_{t_d f_\delta j} - \varkappa_{t_d 0j}} \cdot$$

$$\cdot \prod_{\sigma=1}^{s} \left(\nu_{t_d}(r, w_{t_d})\right)^{\mathfrak{m}_{t_d f_\delta j} - \mathfrak{m}_{t_d 0j}} \left|\xi_k\right|^{\mathfrak{m}_{0j} - \mathfrak{m}_{f_\delta j}} \to 0. \qquad (16)$$

Для членов с номерами $l = \overline{1, \lambda_s}$ и $f_\sigma = \overline{p_\sigma + 1, p_{\sigma-1}}$, $\sigma = \overline{1, s}$, $p_0 = N_j$ выполняются соотношения (6) и (7) соответственно.

Переходя в тождестве (5) к пределу при $\left|\xi_k\right| \to +\infty$, на основании (6), (7), (15) и (16) получаем противоречие, которое и доказывает теорему. ■

Теорема 3. *Пусть для* j*-го уравнения системы* (1.0.0) *выполняются условия* (2), (3), (11) − (13) *(при* $s = n$*) и*

$$\mathfrak{n}_{0j} \geqslant \mathfrak{n}_{g_n j},\ g_n = \overline{\lambda_{n-1} + 1, p_n}\,,$$

существует $h \in \{\lambda_n + 1, \ldots, \lambda_{n-1}\}$ *такой, что* $\mathfrak{n}_{0j} < \mathfrak{n}_{hj}$.

Тогда система (1.0.0) *имеет целые решения* (2.0.0) *класса* $\mathfrak{A}_n$, *где* $w_{t_\sigma}, t_\sigma \in \{1, \ldots, n\}$, $\sigma = \overline{1, n}$, *— такие целые трансцендентные функции, что*

$$\operatorname{ord} w_{t_n}(z) \leqslant \max_{h=\overline{\lambda_n + 1, \lambda_{n-1}}} \left(\frac{\mathfrak{n}_{0j} - \mathfrak{n}_{hj}}{\mathfrak{m}_{t_n hj} - \mathfrak{m}_{t_n 0j}}\right).$$

Теорема 4. *Пусть для j-го уравнения системы* (1.0.0) *выполняются условия* (2), (3) *(при $s=n$) и*

$$\mathfrak{m}_{t_\sigma 0 j} = \ldots = \mathfrak{m}_{t_\sigma \lambda_\sigma j},\ \mathfrak{m}_{t_\sigma 0 j} > \mathfrak{m}_{t_\sigma \theta_\sigma j},$$

$$0 \leqslant \lambda_\sigma \leqslant \lambda_{\sigma-1},\ \theta_\sigma = \overline{\lambda_\sigma + 1, \lambda_{\sigma-1}},\ \lambda_0 = p_n,\ \sigma = \overline{1, n-1},$$

$$\mathfrak{m}_{t_\sigma 0 j} \geqslant \mathfrak{m}_{t_\sigma g_\sigma j},\ g_\sigma = \overline{\lambda_{\sigma-1} + 1, p_n},\ \sigma = \overline{1, n-1},$$

$$\mathfrak{m}_{t_n 0 j} = \ldots = \mathfrak{m}_{t_n \lambda_n j},\ \mathfrak{m}_{t_n 0 j} < \mathfrak{m}_{t_n \theta_n j},\ \theta_n = \overline{\lambda_n + 1, \lambda_{n-1}},$$

$$\mathfrak{n}_{0j} \geqslant \mathfrak{n}_{g_n j},\ g_n = \overline{\lambda_{n-1} + 1, p_n},$$

$$\mathfrak{n}_{0j} > \mathfrak{n}_{lj},\ l = \overline{1, \lambda_n}.$$

Тогда система (1.0.0) *имеет целые решения* (2.0.0) *класса* $\mathfrak{A}_n$, *где* $w_{t_\sigma}, t_\sigma \in \{1, \ldots, n\}$, $\sigma = \overline{1, n}$, *— такие целые трансцендентные функции, что*

$$\operatorname{ord} w_{t_n}(z) \geqslant \min_{h = \overline{\lambda_n + 1, \lambda_{n-1}}} \left(\frac{\mathfrak{n}_{0j} - \mathfrak{n}_{hj}}{\mathfrak{m}_{t_n h j} - \mathfrak{m}_{t_n 0 j}} \right).$$

Теорема 5. *Пусть для j-го уравнения системы* (1.0.0) *выполняются условия* (2), (3), (11), (12), (14) *(при $s=n$) и*

$$a_{0j} = \ldots a_{dj},\ a_{0j} > a_{\gamma j},\ 0 \leqslant d \leqslant \lambda_n,\ \gamma = \overline{d+1, \lambda_n},\ \sum_{l=0}^{d} a_{lj} \neq 0.$$

Тогда система (1.0.0) *не имеет целых решений* (2.0.0) *класса* $\mathfrak{A}_n$.

Теорема 6. *Пусть для j-го уравнения системы* (1.0.0) *выполняются условия* (2), (3), (9) − (12), (14) *(при $s=n$) и*

$$\mathfrak{n}_{0j} = \ldots \mathfrak{n}_{dj},\ \mathfrak{n}_{0j} > \mathfrak{n}_{\gamma j},\ 0 \leqslant d \leqslant \lambda_s,\ \gamma = \overline{d+1, \lambda_s}.$$

Тогда система (1.0.0) *имеет целые решения* (2.0.0) *класса* $\mathfrak{A}_s$, *где* $w_{t_\sigma}, t_\sigma \in \{1, ..., n\}, \sigma = \overline{1, s}$, — *целые трансцендентные функции, а* $w_{t_\delta}, t_\delta \in \{1, ..., n\}, \delta = \overline{s+1, n}, 1 \leqslant s \leqslant n-1$, *суть полиномы с* $\deg w_{t_\delta}(z) = m_{t_\delta}$, *такие, что*

$$\sum_{l=0}^{d} a_{lj} \mathfrak{L}_{lj}(m_{t_\delta}) = 0.$$

Доказательство. Рассуждениями, аналогичными как и при доказательстве теоремы 2, приходим к тождеству (5), для членов которого с номерами $\theta_\sigma = \overline{\lambda_\sigma + 1, \lambda_{\sigma-1}}, \lambda_0 = p_n, \sigma = \overline{1, s}$, $f_\delta = \overline{p_\delta + 1, p_{\delta-1}}, \delta = \overline{s+1, n}$, $f_\sigma = \overline{p_\sigma + 1, p_{\sigma-1}}, \sigma = \overline{1, s}$, $p_0 = N_j$ выполняются соотношения (15), (16) и (7) соответственно.

Так как $\mathfrak{n}_{0j} = \ldots = \mathfrak{n}_{dj}$, то при $|\xi_k| \to +\infty$

$$\frac{A_{lj}(\xi_k)}{A_{0j}(\xi_k)} |\xi_k|^{\mathfrak{m}_{0j} - \mathfrak{m}_{lj}} \to \frac{a_{lj}}{a_{0j}}, \ l = \overline{0, d}. \tag{17}$$

Поскольку $\mathfrak{n}_{0j} > \mathfrak{n}_{\gamma j}$ для всех $\gamma = \overline{d+1, \lambda_s}$, то

$$\frac{A_{\gamma j}(\xi_k)}{A_{0j}(\xi_k)} |\xi_k|^{\mathfrak{m}_{0j} - \mathfrak{m}_{\gamma j}} \to 0 \quad \text{при} \quad |\xi_k| \to +\infty. \tag{18}$$

Переходя в тождестве (5) к пределу при $|\xi_k| \to +\infty$, на основании (7), (15) – (18) получаем равенство

$$\sum_{l=0}^{d} a_{lj} \mathfrak{L}_{lj}(m_{t_\delta}) = 0,$$

что и доказывает теорему 6. ■

Список использованной литературы

1. *Абловец М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. – М.: Мир, 1987. – 479 с.

2. *Айнс Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ГНТИ, 1939. – 719 с.

3. *Алыцкая С.Н., Горбузов В.Н.* Автоморфизмы однозначных алгебраических решений дифференциальных уравнений// Веснік Гродзенскага дзяржаўнага ун-та. Сер. 2. – 2002. – № 2(11). – С. 37 – 43.

4. *Бабарико Н.Н.* О росте рациональных решений алгебраических дифференциальных уравнений первого порядка // Применение информатики и вычислительной техники при решении народнохозяйственных задач: Тез. докл. респ. конф. молодых учёных и специалистов, Минск, 4 – 7 мая 1989 г. / Бел. гос. ун-т. – Минск, 1989. – С. 3.

5. *Бабарико Н.Н.* Целые решения дифференциальных иррациональных уравнений, разрешённых относительно производной// Наука — практике: Тез. докл. IV Гродненской обл. науч.-практ. конф. молодых учёных и специалистов, Гродно, 23 – 24 октября 1987 г. / Гроднен. гос. ун-т. – Гродно, 1987. – С. 37 – 38.

6. *Бондаренко Б.А., Лен К.В., Манжерон Д., Огюзторели М.Н.* К исследованию полилинейных уравнений с частными производными. I. Полиномиальные решения некоторых классов полилинейных уравнений // Bul. Inst. Politehn. Iasi. – 1977. – Sec. 1, V. 23(27), № 3 – 4. – P. 15 – 19.

7. *Бубеска Е.С.* За една Рикатиева диференцијална равенка // Годишен зб. фак. мат. Ун-т Скопје. – 1977. – № 28. – С. 83 – 93.

8. *Валирон Ж.* Аналитические функции. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 236 с.

9. *Виттих Г.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 320 с.

10. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

11. *Воробьёв А.П.* О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, № 1. – С. 79 – 81.

12. *Гнездовский Ю.Ю.* Алгебраические решения дифференциальных уравнений второго порядка // Научно-техническое творчество молодёжи – важный фактор профессиональной подготовки высококвалифицированных специалистов: Тез. докл. межресп. науч.-практ. конф., Гродно, 12 – 14 декабря 1988 г. / Гродненск. гос. ун-т. – Гродно, 1988. – С. 64 – 66.

13. *Гнездовский Ю.Ю.* Параметрические решения уравнений Пенлеве // Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение: Материалы респ. науч.-практ. конф. творческой молодёжи, Минск, 3 – 6 мая 1988 г. / Бел. гос. ун-т. – Минск, 1989. – С. 134.

14. *Голубев В.В.* К теории уравнений Пенлеве // Матем. сб. – 1912. – Т. 28, №1. – с. 323 – 349.

15. *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. – 436 с.

16. *Гольдберг А.А.* Об однозначных интегралах дифференциальных уравнений первого порядка // Укр. мат. журнал. – 1956. – Т. 8, № 3. – С. 254 – 261.

17. *Гольдберг А.А.*, Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 592 с.

18. *Горбузов В.Н., Гнездовский Ю.Ю.* Об алгебраических решениях обыкновенных дифференциальных уравнений // Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения: Тез. докл. III Северо-Кавказской регион. конф., Махачкала, 10 – 15 сентября 1991 г./ Дагестан. гос. ун-т. – Махачкала, 1991. – С. 49.

19. *Горбузов В.Н., Гнездовский Ю.Ю.* Параметрические решения дифференциальных уравнений. – Гродно: ГрГУ, 1993. – 107 с.

20. *Горбузов В.Н., Гнездовский Ю.Ю.* Рост параметрических полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений не выше второго порядка и неприводимых уравнений Пенлеве // Дифференц. уравнения. – Минск, 1988. – 25 с. – Деп. в ВИНИТИ 16.12.88. – № 8847-В88.

21. *Горбузов В.Н., Денисковец А.А.* Некоторые свойства полиномиальныых решений нелинейного дифференциального уравнения // Докл. Акад. наук БССР. – 1982. – Т. 26, № 9. – С. 776 – 779.

22. *Горбузов В.Н., Денисковец А.А.* Полиномиальные решения обыкновенных алгебраических дифференциальных уравнений типа Риккати-Абеля // Дифференц. уравнения. – Минск, 1988. – 54 с. – Деп. в ВИНИТИ 27.07.88. – № 6067-В88.

23. *Горбузов В.Н., Кишкель С.Н.* Обобщённая теорема Виттиха // XI Всесоюз. школа по теории операторов в функциональных пространствах. Ч. III: Тез. докл., Челябинск, 26 – 30 мая 1986 г. / Челябин. политех. ин-т. – Челябинск, 1986. – С. 33.

24. *Горбузов В.Н., Кишкель С.И.* По поводу одной теоремы Виттиха // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 5. – С. 891 – 893.

25. *Горбузов В.Н., Крушельницкий А.А.* О количестве полиномиальных решений различных степеней алгебраических дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – Минск, 1988. – 42 с. – Деп. в ВИНИТИ 5.02.1988. – №1022 – В88.

26. *Горбузов В.Н., Крушельницкий А.А.* О количестве полиномиальных решений различных степеней алгебраических дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 6. – С. 1069 – 1071.

27. *Горбузов В.Н., Крушельницкий А.А.* Рост полиномиальных решений уравнений типа Пенлеве // Дифференц. уравнения. – Минск, 1988. – 29 с. – Деп. в ВИНИТИ 23.12.88. – № 8960-В88.

28. *Горбузов В.Н.* Независимые полиномиальные решения нелинейного дифференциального уравнения высшего порядка // Школа по теории операторов в функциональных пространствах: Тез. докл., Минск, 4 – 11 июля 1982 г. / Бел. гос. ун-т. – Минск, 1982. – С. 47.

29. *Горбузов В.Н., Немец В.С.* К вопросу экспоненциально-полиномиальных решений нелинейного дифференциального уравнения // Докл. Акад. наук БССР. – 1986. – Т. 30, № 4. – С. 297 – 300.

30. *Горбузов В.Н., Немец В.С.* Об однозначных решениях дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 6. – С. 1084 – 1085.

31. *Горбузов В.Н., Немец В.С.* О целых решениях одного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка // Дифференц. уравнения. – Минск, 1988. – 26 с. – Деп. в ВИНИТИ 25.05.88. – № 4015-В88.

32. *Горбузов В.Н., Немец В.С.* По поводу однозначных решений дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – Минск, 1989. – 17 с. – Деп. в ВИНИТИ 11.12.89. – №7309-В89.

33. *Горбузов В.Н., Немец В.С.* Целые функции-решения дифференциального уравнения первого порядка с обобщёнными квазиполиномиальными коэффициентами // Punime Mat. – 1988. – № 3. – P. 23 – 34.

34. *Горбузов В.Н.* Полиномиальные решения алгебраических дифференциальных уравнений. – Гродно: ГрГУ, 1991. – 119 с.

35. *Горбузов В.Н., Прокашева В.А.* Целые трансцендентные решения алгебраических дифференциальных уравнений // Математическое моделирование и вычислительная математика: Тез. докл. респ. науч. конф., Гродно, 17 – 22 сентября 1990 г./ Ин-т мат. Акад. наук БССР. – Гродно, 1990. – С.44 – 45.

36. *Горбузов В.Н., Самодуров А.А.* Уравнение Дарбу и его аналоги. – Гродно: ГрГУ, 1985. – 94 с.

37. *Горбузов В.Н., Самодуров А.А.* Уравнения Риккати и Абеля. – Гродно: ГрГУ, 1986. – 101 с.

38. *Горбузов В.Н.* Системы со специальными аналитическими и качественными свойствами: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Минск: БГУ, 1981. – 154 с.

39. *Гриншпун З.С.* Дифференциальне уравнения ортогональных многочленов Бернштейна–Сеге// Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26, № 5. – С. 769 – 776.

40. *Громак В.И.* Аналитичекая характеристика решений уравнений Пенлеве: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Минск: БГУ, 1974. – 106 с.

41. *Громак В.И.* К теории уравнений Пенлеве// Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11, № 2. – С. 373 – 376.

42. *Громак В.И., Лукашевич Н.А.* Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. — Минск: Университетское, 1990. — 157 с.

43. *Громак В.И.* Об алгебраических решениях третьего уравнения Пенлеве // Докл. Акад. наук БССР. — 1979. — Т. 23, № 6. — С. 499 — 502.

44. *Громак В.И.* Об однопараметрических семействах решений уравнений Пенлеве // Дифференц. уравнения. — 1978. — Т. 14, № 12. — С. 2131 — 2135.

45. *Громак В.И.* О решениях пятого уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. — 1976. — Т. 12, № 4. — С. 740 — 742.

46. *Денисковец А.А.* К вопросу полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений // Наука — практике: Материалы VI Гродненской обл. конф. молодых учёных и специалистов, Гродно, 20 — 21 ноября 1990 г. / Гроднен. гос. ун-т. — Гродно, 1990. — С. 123.

47. *Денисковец А.А.* Об одном методе построения полиномиальных решений алгебраического дифференциального уравнения специального вида // Дифференц. уравнения. — Минск, 1986. — 23 с. — Деп. в ВИНИТИ 24.03.86. — № 1926-В86.

48. *Денисковец А.А.* О максимальном числе полиномиальных решений заданной структуры // Применение информатики и вычислительной техники для решения народнохозяйственных задач: Тез. докл. респ. конф. молодых учёных и специалистов, Минск, 4 — 7 мая 1989 г. / Бел. гос. ун-т. — Минск, 1989. — С. 8.

49. *Денисковец А.А.* О полиномиальных решениях нелинейных уравнений высших порядков // Совершенствование подготовки математиков со специализацией «Дифференциальные уравнения и их приложения»: Материалы конф., Минск 10 — 12 мая 1984 г. / Бел. гос. ун-т. — Минск, 1984. — С. 12.

50. *Денисковец А.А.* О полиномиальных решениях одного нелинейного дифференциального уравнения // Молодёжь и научно-технический прогресс: Тез. докл. III Гроднен. обл. конф. молодых учёных и специалистов, Гродно, 24 — 25 января 1986 г. / Гроднен. гос. ун-т. — Гродно, 1986. — С. 120.

51. *Денисковец А.А.* Полиномиальные решения алгебраических дифференциальных уравнений высших порядков // Математическое моделирование и вычислительная математика: Тез. докл. респ. науч. конф., Гродно, 17 – 22 сентября 1990 г. / Ин-т мат. Акад. наук БССР. – Гродно, 1990. – С. 51.

52. *Денисковец А.А.* Полиномиальные решения нелинейных дифференциальных уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Гродно, 1991. – 87 с.

53. *Денисковец А.А.* Целые решения системы алгебраических дифференциальных уравнений второго порядка // Актуальные проблемы информатики: математическое, программное и информационное обеспечение: Материалы межресп. науч.-практ. конф. творческой молодёжи, Минск, 2 – 6 апреля 1990 г. / Бел. гос. ун-т. – Минск, 1990. – С. 228 – 229.

54. *Денисковец А.А.* Целые решения системы алгебраических дифференциальных уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – Минск, 1990. – 31 с. – Деп. в ВИНИТИ 29.11.90. – № 6013-В90.

55. *Еругин Н.П.* Аналитическая теория и проблемы вещественной теории дифференциальных уравнений, связанные с первым методом и методами аналитической теории // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 11. – С. 1821 – 1863.

56. *Еругин Н.П.* К теории первого уравнения Пенлеве // Доклады АН БССР. – 1958. – Т. 2, № 1. – С. 3 – 6.

57. *Еругин Н.П.* Проблема Римана. – Минск: Наука и техника, 1982. – 336 с.

58. *Еругин Н.П.* Теория подвижных особых точек уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1976. – Т. 12, № 4. – С. 579 – 598.

59. *Зимогляд В.В.* О порядке роста целых трансцендентных решений алгебраических дифференциальных уравнений второго порядка // Матем. сб. – 1971. – Т. 85(127), вып. 2(6). – С. 286 – 302.

60. *Карачик В.В.* О полиномиальных решениях линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами //

Вопросы вычисл. и прикл. мат.: Сб. ст. – Ташкент, 1985. – № 77. – С. 17 – 36.

61. *Кишкель С.И.* Алгебраические дифференциальные уравнения с заданным ростом целых решений // Динамическое моделирование сложных систем: Тез. докл. всесоюзн. науч.-техн. конф., Гродно, 22 – 24 сентября 1987 г. – М., 1987. – С. 138.

62. *Кишкель С.И.* К вопросу полиномиальных решений алгебраического дифференциального уравнения // Молодёжь и научно-технический прогресс: Тез. докл. III Гродненской областной конф. молодых учёных и специалистов, Гродно, 24 – 25 января 1986 г. / Гроднен. гос. ун-т., Гродно, 1986. – С. 124.

63. *Кишкель С.И.* По поводу количества полиномиальных решений алгебраического дифференциального уравнения специального вида // Дифференц. уравнения. – Минск, 1987. – 16 с. – Деп. в ВИНИТИ 29.01.87. – № 696-В87.

64. *Кондратеня С.Г.* К решению одной проблемы Пенлеве // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16, № 11. – С. 2095 – 2098.

65. *Кондратеня С. Г.* По поводу особенностей решений обыкновенного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 1968. – Т. 4, № 12. – С. 2286 – 2289.

66. *Крушельницкий А.А.* Асимптотические свойства полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений // Наука – практике: Материалы IV Гродненской обл. науч.-практ. конф. молодых учёных и специалистов, Гродно, 23 – 24 октября 1987 г. / Гроднен. гос. ун-т. – Гродно, 1987. – С. 40 – 41.

67. *Крушельницкий А.А.* Границы изменения степени полиномиальных решений алгебраических дифференциаьлных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 11. – С. 2010 – 2012.

68. *Крушельницкий А. А.* Границы изменения степени полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – Минск, 1988. – 29 с. – Деп. в ВИНИТИ 5.02.88. – № 1023-В88.

69. *Крушельницкий А.А.* О полиномиальных решениях алгебраических дифференциальных уравнений // Математическое

моделирование и вычислительная математика: Тез. докл. респ. науч. конф., Гродно, 17 – 22 сентября 1990 г./ Ин-т мат. Акад. наук БССР. – Гродно, 1990. – С. 73.

70. *Крушельницкий А.А.* Полиномиальные решения уравнения третьего порядка P-типа // Применение информатики и вычислительной техники при решении народнохозяйственных задач: Тез. докл. респ. конф. молодых учёных и специалистов, Минск, 4 – 7 мая 1989 г. – Минск: БГУ, 1989. – С. 12.

71. *Крушельницкий А.А.* По поводу полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 12. – С. 2069 – 2075.

72. *Крушельницкий А.А.* Рост полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Гродно, 1989. – 107 с.

73. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

74. *Лазов П., Димитровски Д.* Егзистенција на полиномни решенија на една класа диференцијални равенки од Clairaut-ов тип // Годишен. зб. Природно-мат. фак. Ун-т Скопје. – 1975 (1976). – А, кн. 25 – 26. – С. 93 – 99.

75. *Лазов П., Димитровски Д.* Кон методологијата на линеарните диференцијални равенки од втор ред со полиномни коефициенти // Годишен. зб. Природно-мат. фак. Ун-т Скопје. – 1975 (1976). – А, кн. 25 – 26. – С. 67 – 74.

76. *Лазов П., Димитровски Д.* Полиномиальные решения алгебраических дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1978. – Т. 14, № 5. – С. 922 – 925.

77. *Лазов П., Димитровски Д.* Условия существования максимального числа полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 6. – С. 1131 – 1134.

78. *Лазов П., Димитровски Д.* Условия существования максимального числа полиномиальных решений нелинейных дифференциальных уравнений // Годишен зб. Природно-мат. фак. Ун-т Скопје. – 1975 (1976). – А, Кн. 25 – 26. – С. 101 – 106.

79. *Лазов П.Р, Димитровски Д.С.* Алгоритми за полиномни решенија на алгебарските диференцијални равенки // Годишен зб. Природно-мат. фак. Ун-т Скопје. — 1975. — А, Кн. 25 — 26. — С. 107 — 112.

80. *Лазов П.Р.* Об одной системе нелинейных дифференциальных уравнений // Приближен. методы исследов. дифференц. уравнений и их приложений: Сб. ст. — Куйбышев, 1979. — № 5. — С. 118 — 123.

81. *Лазов П.Р.* Об одной теореме Л.Г. Орещенко // Publ. Elektrotehn. fak. Univ. Beogradu. Ser. Mat. i fiz. — 1976. — No 544 — 576. — S. 103 — 109.

82. *Лазов П.Р.* Об одном нелинейном дифференциальном уравнении // Математички весник. — 1977. — Т. 1, № 14. — С. 387 — 391.

83. *Лазов П.Р.* Параметрическое решение одного класса дифференциальных уравнений типа Клеро // Бил. Друшт. мат. и физ. СРМ. — 1975 — 1976 (1977). — Кн. 26. — С. 33 — 34.

84. *Лазов П.Р.* Параметрические решения одного класса нелинейных дифференциальных уравнений // Бил. Друшт. мат. и физ. СРМ. — 1974. — Кн. 25. — С. 9 — 10.

85. *Лазов П.Р.* Полиномиальные решения одной системы нелинейных дифференциальных уравнений // Бил. Друшт. мат. и физ. СРМ. — 1974. — Кн. 25. — С. 41 — 44.

86. *Лазов П.Р.* Полиномна решенья двеjу нелинеарных диференциальных jедначина // Математички весник. — 1977. — Т. 1, Кн. 14. — С. 379 — 385.

87. *Лазов П.Р.* Степени полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений // Math. Balkan. — 1975. — Vol 35, No 5. — С. 189 — 192.

88. *Лазов П.Р.* Условия существования максимального числа полиномиальных решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений // Приближ. методы исслед. дифференц. уравнений и их приложений: Сб. ст. — Куйбышев, 1979. — № 5. С. 112 — 118.

89. *Лаппо-Данилевский И.А.* Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1957. — 456 с.

90. *Латышева К.Я., Терещенко Н.И.,* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений и их приложения (метод Фробениуса – Латышевой). – Киев: ИМ АН УССР, 1970. – 393 с.

91. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

92. *Леонтьев А.Ф.* Целые функции. Ряды экспонент. – М.: Наука, 1983. – 176 с.

93. *Лукашевич Н.А., Денисковец А.А., Немец В.С.* Алгебраические дифференциальные уравнения с максимальным числом полиномиальных решений заданной структуры // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 12. – С. 2172 – 2174.

94. *Лукашевич Н.А.* К теории третьего уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 11. – С. 1913 – 1923.

95. *Лукашевич Н.А.* К теории четвёртого уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 5. – С. 771 – 789.

96. *Лукашевич Н.А.* К теории шестого уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. – 1972. – Т. 8, № 8. – С. 1404 – 1408.

97. *Лукашевич Н.А.* Некоторые задачи аналитической теории дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев: АН УССР, 1971. – 274 с.

98. *Лукашевич Н.А.* О решениях пятого уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. – 1968. – Т. 4, № 8. – С. 1413 – 1420.

99. *Лукашевич Н.А.* Элементарные решения некоторых уравнений Пенлеве // Дифференц. уравнения. – 1965. – Т. 1, № 6. – С. 731 – 735.

100. *Лукашевич Н.А., Яблонский А.И.* Об одном классе решений шестого уравнения Пенлеве // Дифференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 3. – С. 520 – 523.

101. *Макарова В.В.* Об одном классе ортогональных полиномов Бернштейна – Сеге и дифференциальных уравнениях, связан-

ных с ними // Дифференц. и интегральные уравнения (Горький). – 1982. – № 6. – С. 58 – 61.

102. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. – 703 с.

103. Маркушевич А.И. Целые функции. – М.: Наука, 1975. – 120 с.

104. *Мартынов И.П.* Аналитические свойства решений одного дифференциального уравнения третьего порядка // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 5. – С. 764 – 771.

105. *Мартынов И.П.* Аналитические свойства уравнений и систем третьего порядка: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Гродно, 1987. – 255 с.

106. *Мартынов И.П., Берёзкина Н.С.* Системы типа Пенлеве. – Гродно: ГрГУ, 1986. – 119 с.

107. *Мартынов И.П.* Дифференциальные уравнения с подвижной особой линией // Дифференц. уравнения. – 1977. – Т. 13, № 10. – С. 1879 – 1881.

108. *Мартынов И.П.* Об уравнениях третьего порядка без подвижных критических особенностей // Дифференц. уравнения. – 1985. – Т. 21, № 6. – С. 937 – 946.

109. *Мартынов И.П.* О свойствах решений одного дифференциального уравнения третьего порядка // Доклады АН БССР. – 1979. – Т. 23, № 9. – С. 780 – 783.

110. *Матвеев Н.М.* Аналитическая теория дифференциальных уравнений. – Л.: ЛГПИ, 1988. – 104 с.

111. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйшая школа, 1963. – 548 с.

112. *Миколаш М.* О полиномиальных решениях дифференциальных уравнений Штурма – Лиувилля // Вопросы математики и механики сплошных сред: Сб. ст. – М.: МИСИ, 1984. – С. 21 – 31.

113. *Мкртумян Р.Р.* Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с рациональными решениями // Дифференц. уравнения. – 1982. – Т. 18, № 4. – С. 713 – 716.

114. *Мохонько А.З., Мохонько В.Д.* Оценки неванлиновских характеристик некоторых классов мероморфных функций и их приложения к дифференциальным уравнениям // Сибирский матем. журнал. – 1974. – Т. 15, № 6. – С. 1305 – 1322.

115. *Мохонько А.З.* О мероморфных решениях дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 4. – С. 593 – 598.

116. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. – М.; Л.: ОГИЗ, 1941. – 388 с.

117. *Неванлинна Р.* Униформизация. – М.: Иностранная литература, 1955. – 436 с.

118. *Немец В.С., Горбузов В.Н.* О целых решениях одного нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с целыми трансцендентными коэффициентами // Молодёжь и научно-технический прогресс: Тез. докл. III Гродненской обл. конф. молодых учёных и специалистов, Гродно, 24 – 25 января 1986 г./ Гроднен. гос. ун-т. – Гродно, 1986. – С. 133– 134.

119. *Немец В.С., Горбузов В.Н.* Построение в целом полиномиальных решений алгебраических дифференциальных уравнений // Наука – практике: Материалы IV Гродненской обл. науч.-практ. конф. молодых учёных и специалистов, Гродно, 23 – 24 октября 1987 г./ Гроднен. гос. ун-т. – Гродно, 1987. – С. 43 – 44.

120. *Немец В.С., Горбузов В.Н.* Целые функции, определяемые обыкновенными дифференциальными уравнениями // Качественная теория дифференциальных уравнений: Тез. докл. VI всесоюзн. конф., Иркутск, 1 – 3 июля 1986 г./ Акад. наук СССР. – Иркутск, 1986. – С. 135 – 136.

121. *Немец В.С.* Асимптотические характеристики рациональных решений алгебраических дифференциальных уравнений// Математическое моделирование и вычислительная математика: Тез. докл. респ. науч. конф., Гродно, 17 – 22 сентября 1990 г./ Ин-т мат. Акад. наук БССР. – Гродно, 1990. – С. 102.

122. *Немец В.С.* К вопросу целых решений нелинейного дифференциального уравнения первого порядка с обобщёнными квазиполиномиальными коэффициентами // Актуальные проблемы

информатики: математическое, программное и информационное обеспечение: Материалы межресп. науч.-практ. конф. творческой молодёжи, Минск, 2 – 6 апреля 1990 г. / Бел. гос. ун-т. – Минск, 1990. – С. 172 – 173.

123. *Немец В.С.* Однозначные решения дифференциальных уравнений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Гродно: ГрГУ, 1991. – 125 с.

124. *Немец В.С.* Рациональные решения алгебраических дифференциальных уравнений // Наука – практике: Материалы VI Гродненской обл. конф. молодых учёных и специалистов, Гродно, 20 – 21 ноября 1990 г. / Гроднен. гос. ун-т. – Гродно, 1990. – С. 127.

125. *Немец В.С.* Структура полиномиальных решений дифференциальных уравнений // Применение информатики и вычислительной техники при решении народнохозяйственных задач: Тез. докл. респ. конф. молодых учёных и специалистов, Минск, 7 мая 1989 г. / Бел. гос. ун-т. – Минск, 1989. – С. 14.

126. *Немец В.С.* Целые решения дифференциальных уравнений первого порядка с обобщёнными квазиполиномиальными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – Минск, 1989. – 19 с. – Деп. в ВИНИТИ 11.12.1989. – № 7313-В89.

127. *Орещенко Л.Г.* Некоторые свойства целых решений нелинейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1973. – Т. 9, № 7. – С. 1236 – 1243.

128. *Орещенко Л.Г.* Условия существования максимального числа полиномиальных решений дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10, № 6. – С. 1009 – 1014.

129. *Орещенко Л.Г.* Целые решения нелинейных алгебраических дифференциаьных уравнений: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Л., 1979. – 7 с.

130. *Орещенко Л.Г.* Целые решения одного нелинейного дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10, № 2. – С. 253 – 257.

131. *Павлючик П.Б.* Асимптотические характеристики рациональных решений линейных дифференциальных уравнений вто-

рого порядка // Актуальные проблемы информатики: математическое и информационное обеспечение: Материалы респ. науч.-практ. конф. творческой молодёжи, Минск, 3 – 6 мая 1988 г. / Бел. гос. ун-т. – Минск, 1989. – С. 131.

132. *Петренко В. П.* Рост мероморфных функций. – Харьков: Вища школа, 1978. – 136 с.

133. *Писаренок В.П.* Поведение решений одного класса дифференциальных уравнений первого порядка в комплексной плоскости // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 5. – С. 930 – 932.

134. *Пролиско Е.Г.* Полиномиальные решения уравнения типа Льенара // Дифференциальные уравнения и их приложения: Сб. ст. – Днепропетровск, 1976. – С. 105 – 112.

135. *Самуйлов А.З.* Некоторые свойства полиномиальных решений дифференциальных уравнений высших порядков // Дифференц. уравнения. – 1971. – Т. 7, № 12. – С. 2287 – 2289.

136. *Самуйлов А.З.* О полиномиальных решениях дифференциального уравнения первого порядка // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. – 1972. – № I. – С. 121 – 124.

137. *Сікорський Ю.Т.* Необхідні та достатні умови існування поліноміального частинного разв’язку неодрідного лінійного диференціального рівнання // Вісник Київ. ун-ту. Сер. мат. та мех. – 1972. – № 14. – С. 97 – 99.

138. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1958. – 468 с.

139. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. – Вильнюс: Минтис, 1972. – 468 с.

140. *Файзиев С.* Построение полиномиальных решений системы линейных дифференциальных уравнений // Укр. матем. журнал. – 1983. – Т. 35, № 2. – С. 259 – 261.

141. *Хейман У.* Мероморфные функции. – М.: Мир, 1966. – 287 с.

142. *Цегельник В.В.* Аналитическая характеристика решений нелинейных дифференциальных уравнений P-типа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Минск, 1985. — 82 с.

143. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 1. Функции одного переменного. — М.: Наука, 1985. — 336 с.

144. *Шапкарев И.А.* За една хомогенна линеарна диференцијална равенка од трет. ред // Годишен. зб. Техн. фак. Ун-т Скопје. — 1964. — № 6. — С. 45 — 51.

145. *Штокало И.З.* Важный вклад в развитие дифференциальных уравнений и их приложение // Дифференц. уравнения. — 1978. — Т. 14, № 12. — С. 2123 — 2130.

146. *Щербаков Б.А., Коренева Л.В.* О полиномиальных решениях дифференциальных уравнений вида $a_0y + a_1y' + \ldots + a_ny^{(n)} = P(x)$, где $P(x)$ — полином // Исслед. по функц. анализу и дифференц. уравнениям. — Кишинев, 1981. — С. 124 — 128.

147. *Яблонский А.И.* Аналитические свойства решений систем дифференциальных уравнений: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Минск: АН БССР, 1971. — 270 с.

148. *Яблонский А.И.* О вычетах полюсов решений второго уравнения Пенлеве // Доклады АН БССР. — 1960. — Т.4, № 2. — С. 47 — 50.

149. *Яблонский А.И.* О рациональных решениях второго уравнения Пенлеве // Весці АН БССР. Сер. фіз.-техн. навук. — 1959. — № 3. — С. 30 — 35.

150. *Adomian G., Rach R.* Polynomial nonlinearites in differential equations // J. Math. Anal. and Appl. — 1985. — Vol. 109, No. 1. — P. 90 — 95.

151. *Bhargava M., Kaufman H.* Degress of polynomial solutions of a class of Riccati-type differential equations // Coll. Math. — 1964. — Vol. 16. — P. 211 — 223.

152. *Bhargava M., Kaufman H.* Existence of polynomial solutions of a class of Riccati-type differential equations // Coll. Math. — 1965. — Vol. 17. — P. 135 — 143.

153. *Bhargava M., Kaufman H.* Some properties of polynomial solutions of a class of Riccati-type differential equations // Call. Math. – 1966 – 1967. – Vol. 18. – P. 3 – 6.

154. *Bierski F., Hansel Z.* Rozwiazania wielomianowe równań różniczkowych i różniczkowych liniowych o wspólczynnikach wielomianowych // Zesz. nauk. AGH. – 1977. – No 583. – S. 25 – 36.

155. *Brenke W.C.* On polynomial solutions of a class linear differential equations of the second order // Bull. Amer. Math. Soc. – 1930. – Vol. 36. – P. 77 – 84.

156. *Bureau F.J.* Systèmes différentiels à points critiques fixes. VII – XIII. Les systèmes diffèrentiels polynomiaux stables // Bull. cl. sci. Acad. roy. Belg. – 1981 – 1982. – Vol. 67, No. 7 – 9. – P. 512 – 528; Vol. 67, No. 10. – P. 637 – 665; Vol. 67, No. 11. – P. 755 – 781; Vol. 67, No. 12. – P. 942 – 957; Vol. 68, No. 2. – P. 56 – 80; Vol. 68, No. 4. – P. 220 – 248; Vol. 68, No. 6. – P. 398 – 423.

157. *Campbell J.G.* A criterion for the polynomial solutions of a certain Riccati equation // Amer. Math. Monthly. – 1952. – Vol. 59. – P. 388 – 389.

158. *Campbell J.G.*, Golomb M. On the polynomial solutions of Riccati equation // Amer. Math. Monthly. – 1954. – Vol. 61. – P. 402 – 404.

159. *Dehesa J. S., Buendia E., Sanches-Buendia M. A.* On the polynomial solutions of ordinary differential equations of the fourth order // J. Math. Phys. – 1985. – Vol. 26, No 7. – P. 1547 – 1552.

160. *Dimitrovski D.*, Lazov P. Systeme des equations differentielles du premier ordre au moyen des residus // Годишен. зб. Природно-мат. фак. Ун-т Скопjе. – 1975 (1976). – A, No 25 – 26. – C. 61 – 65.

161. *Eier R., Lidl R., Dunn K.B.* Differential equations for generalize Chebyshev polynomials // Rend. Math. e appl. – 1981. – Vol. 1, No 4. – P. 633 – 646.

162. *Frei M.* Uber die Losungen linearer Differentialgleichungen mit ganzen Funktionen als Koeffizienten // Comment. math. Helv. — 1961. — Bd 35. — S. 201 – 222.

163. *Garde R.M.* Polynomial solutions of some nonlinear differential equations of the second order // Math. stud. – 1974. – Vol. 42, No 1. – P. 90 – 96.

164. *Gorbuzov V.N., Samodurov A.A.* Growth properties of the rational solutions of the second order algebraic differential equation // Inst. of Math. Univ. of Oslo. – 1989. – No 8. – P. 1 – 8.

165. *Hahn W.* On differential equations for orthogonal polynomials // Funkc. ekvacioj. – 1978. – Vol. 21, No 1. – P. 1 – 9.

166. *Hahn W.* Über die Jacobischen polynome und zwei verwandte polynomklassen // Math. Z. – 1935. – Vol. 39, No 4. – P. 634 – 638.

167. *Hall L. M.* Regular singular differential equations wiiose conjugate equation has polynomial solutions // SIAM J. Math. Anal. – 1977. – Vol. 8, No 5. – P. 778 – 784.

168. *Hautot A.* Sur les solutions polynomiales de l'équation différentille $zP_n'' + (az^2 + bz + c)P_n' + (d + ez + fz^2)P_n = 0$ // Bull. Soc. roy. sci. Liége. – 1969. – Vol. 38, No 11 – 12. – P. 660 – 663.

169. *Hautot A.* Sur les solutions polynomiales de l'équation différentille $z(z-1)P_n''+(az^2+bz + c)P_n'+(d+ez+fz^2)P_n = 0$ // Bull. Soc. roy. sci. Liége. – 1969. – Vol. 38, No 11 – 12. – P. 654 – 659.

170. *Hille E.* Lectures on ordinary differential equations. – London: Addison – Wesley, 1969. – 723 p.

171. *Hille E.* Ordinary differential equations in the complex domain. — John Willy and Sons. Inc., 1976. – 486 p.

172. *Huffstutler R. G.*, Smith L. D., Ya Yin Liu. Criterion for the polynomial solutions of certain first order differential equations // Port. Math. – 1972. – Vol. 31, No 3. – P. 139 – 145.

173. *Jhong Xiaokuan.* On the meromorphic solutions of a class of ordinary differential equations // Acta. Sci. natur. Univ. norm. hunanensis. – 1989. – Vol. 12, No. 1. – P. 16 – 20.

174. *Johnson D.E., Johnson J.R.* On circuit-theory polynomial classes // IEEE Trans. Circuit Theory. – 1973. – Vol. 20, No 5. – P. 603 – 605.

175. *Kalinowski M. W., Sewerynski M.* Differential equation for Hermite-Bell polyomials // Math. Proc. CambridgePhil. Soc. – 1982. – Vol. 91, No 2. – P. 259 – 265.

176. *Krall A.M.* Chebyshev sets of polynomials which satisfy an ordinary differential equation // SIAM Rev. – 1980. – Vol. 22, No 4. – P. 436 – 441.

177. *Krall A.M.* Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1981. – Vol. A 87, No 3 – 4. – P. 271 – 288.

178. *Krall H.L., Shaffer T.M.* Differential equations of infinite order for orthogonal polynomials // Ann. Mat. pura ed Appl. – 1966. – Vol. 74. – P. 135 – 172.

179. *Lazov P.R., Dimitrovski D.S.* Sur une equation differentielle de Ricati // Бил. Друшт. мат. и физ. СРМ. – 1974. – № 25. – С. 37 – 40.

180. *Lazov P.R.* Dve primedbe u vesi sa parametrskim resavanjem algebarskih diferencijalnih jednacina prvoc reda // Математички весник. – 1979. – Т. 3, No 2. – С. 157 – 164.

181. *Lazov P.R.* Sur un systeme des equations differentielles algebriques // Glas. mat. – 1980. – Vol. 15, No 1. – S. 51 – 60.

182. *Lesky P.* Über Polynomlösungen von Differentialgleichungen und Differentialgleichungen zweiter Ordnung // Anz. Osterr. Akad. Wiss. Math. – naturwiss. Kl. – 1985 (1986). – Vol. 122. – P. 29 – 33.

183. *Llorente P.*, Ortiz E.L. On the existence and construction of polynomial solutions of certain types of differential equations // Rov. Union Mat. argent. y Asoc. fis. argent. – 1968. – Vol. 23, No 4. – P. 183 – 189.

184. *Malmquist J.* Sur les fonctions a un nombre fini de branches definies par les equations differentielles du premier ordre // Acta. Math. — 1913. — Vol. 36. — P. 289 – 343.

185. *Malmquist J.* Sur les fonctions a un nombre fini de branches satisfaisant a une equation differentielle du premier ordre // Acta. Math. — 1920. — Vol. 42. — P. 317 — 325.

186. *Mambriani A.* Equazioni differenziali lineari aventi soluzioni polinomiali // Boll. Un. Mat. Ital. — 1938. — Vol. 17. — P. 26 — 32.

187. *Meux J. W.* Ordinary differential equations of the fourth order with orthogonal polynomial solutions // Amer. Math. Monthly. — 1966. — Vol. 73, No 4. — P. 104 — 110.

188. *Ortiz E.L.* Polynomlősungen von Differenzengleichungen // Z. angew. Math. und Mech. — 1966. — Vol. 46, No 6. — P. 394 — 395.

189. *Rainville E.D.* Necessary conditions for polynomyal solutions of a class of Riccati-type differenial equations // Amer. Math. Monthly. — 1936. — Vol. 43. — P. 473 — 476.

190. *Sâpkarev I.A.* Eine lemerkung über polynomlösungen der homogegen linearen differentialgleichungen // Бил. Другит. мат. и физ. СРМ. — 1975 — 1976 (1977). — No 26. — С. 5 — 8.

191. *Sâpkarev I.A.* Polynome als allgemeine integrale der normalen homogenen linearen Differentialgleichungssysteme // Годишен. зб. фак. мат. Ун-т Скопје. — 1977. — Кн. 28. — P. 69 — 72.

192. *Sâpkarev I.A.* Polynome als partikuläre integrale der normalen homogenen linearen Differentialgleichungssysteme // Годишен. зб. Фак. мат. Ун-т Скопје. — 1978. — No 29. — P. 51 — 55.

193. *Schubart H.* Zuz Wertverteiling der Painlevescher Transcendenten// Arh. Math. — 1956. — Vol. 7, No 4. — P. 235 — 322.

194. *Shah S. M.* Entire solutions of linear differential equations and bounds for growth and index numbers // Proc. Roy. Soc. Edinburg. — 1983. — A94, No 1 — 2. — P. 49 — 60.

195. *Shimomura Sh.* Entire solutions of a polinomial difference equation // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. — 1981. — Ser. IA, Vol. 28, No 2. — P. 253 — 266.

196. *Strelitz Sh.* Asymptotic properties of entire transcendental solutions of algebraic differential equations // Contemp. Math. — 1983. — Vol. 25, — P. 171 — 214.

197. *Strelitz Sh.* Three theorems on the growht of entire transcendental solutions of algebraic differential equations // Can. J. Math. – 1983. – Vol. 35, No 6. – P. 1110 – 1128.

198. *Valiron G.* Sur une fonction entiére d'ordre nul qui est solution d'une équation differentialle algébrique // C. r. Acad. sci. – 1925. – Vol. 180. – P. 571 – 573.

199. *Wiman A.* Über den Zusammenhang zwischer dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grösten Betrage bei gegebenem Argument der Function // Acta. Math. – 1918. – Vol. 41. – P. 1 – 28.

200. *Wiman A.* Über den Zusammenhang zwischer dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grösten Glied der zugehörigen Toylorschen Reihe // Acta. Math. – 1914. – Vol. 37. – P. 305 – 326.

201. *Wittich H.* Ganze transzendente Lösunger algebraischer Differentialgleichungen // Math. Ann. – 1950. – Vol. 122, No 1. – P. 221 – 234.

202. *Zeitlin D.* On a class of ordinary linear differential equations having $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ and $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k x^k$ as solutions // Amer. Math. Mon. – 1977. – Vol. 84, No 9. – P. 716 – 720.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 3

Глава I. **Асимптотика полиномиальных решений** 5

§ 1. Особые и неособые степени полиномиальных решений 6

1. Алгебраические дифференциальные уравнения высших порядков 6

2. Неособые степени полиномиальных решений 7

3. Особые степени полиномиальных решений 13

§ 2. Границы изменения степеней полиномиальных решений . . 26

1. Асимптотическая формула представления производных полинома 26

2. Нижняя и верхняя границы степеней полиномиальных решений 29

§ 3. Коэффициент высшего члена полиномиального решения . 42

§ 4. Полиномиальные решения уравнений P-типа 49

Глава II. **Построение полиномиальных решений в целом** . . 72

§ 1. Структурный метод построения полиномиальных решений 76

§ 2. Максимальное число полиномиальных решений определённой структуры 92

Глава III. **Количество полиномиальных решений различных степеней** 116

§ 1. Вспомогательные утверждения 116

§ 2. Ограниченность количества полиномиальных решений различных степеней числом членов алгебраического дифференциального уравнения 131

Глава IV. **Полиномиальные решения алгебраических уравнений типа Риккати – Абеля** 142

§ 1. Полиномиальные решения уравнения

$\frac{dw}{dz} = \sum\limits_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(z) w^{\nu_i}$ 144

§ 2. Полиномиальные решения уравнения

$A(z)\,\frac{dw}{dz} = \sum\limits_{i=0}^{N} B_{\mu_i}(z) w^{\nu_i}$ 159

Глава V. **Целые трансцендентные решения** 171

§ 1. Сведения о целых функциях 171

§ 2. Целые решения обыкновенных дифференциальных уравнений 180
1. Целые трансцендентные решения алгебраических дифференциальных уравнений 180
2. Целые трансцендентные решения уравнений с целыми коэффициентами 201
3. Целые трансцендентные решения с конечным числом нулей 204
Глава VI. **Целые решения систем алгебраических дифференциальных уравнений** 219
§ 1. Полиномиальные решения систем алгебраических дифференциальных уравнений 220
§ 2. Целые трансцендентные решения систем алгебраических дифференциальных уравнений 225
Список использованной литературы 234

Научное издание

Горбузов Виктор Николаевич

ЦЕЛЫЕ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Монография

Редактор Н.Н. Красницкая
Компьютерная верстка: П.Ф. Проневич

Сдано в набор 16.01.2006. Подписано в печать 15.03.2006.
Формат 60х84/16. Бумага офсетная.
Печать RISO. Гарнитура Таймс.
Усл. печ. л. 14,96. Уч.-изд. л. 14,19. Тираж 150 экз. Заказ

Учреждение образования «Гродненский государственный
университет имени Янки Купалы».
ЛИ № 02330/0133257 от 30.04.2004. Ул. Пушкина, 39, 230012, Гродно.

Отпечатано на технике издательского центра
Учреждения образования «Гродненский государственный
университет имени Янки Купалы».
ЛП № 02330/0056882 от 30.04.2004. Ул. Пушкина, 39, 230012, Гродно.